ÜBER DAS SPEKTRUM STARK STETIGER HALBGRUPPEN POSITIVER OPERATOREN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Günther Greiner
aus Marktredwitz

1980

ÜBER DAS SPEKTRUM STARK STETIGER HALBGRUPPEN POSITIVER OPERATOREN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Günther Greiner
aus Marktredwitz

1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 26. 11. 1980

Dekan : Prof. Dr. K. Zeller

1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. H. Schaefer

2. Berichterstatter : Prof. Dr. R. Nagel

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 3

1. Methoden und Hilfsmittel für die Spektraltheorie stark stetiger Halbgruppen 7

Resolventen und Pseudoresolventen 8

Stark stetige Halbgruppen 23

Banachverbände und positive Operatoren 41

2. Das Randspektrum positiver Halbgruppen 49

3. Die Eigenwerte im Randspektrum 78

4. Zur Asymptotik positiver Halbgruppen 100

Literaturverzeichnis 112

EINLEITUNG

Die systematische Erforschung derjenigen Objekte, die man heute "stark stetige Halbgruppen" oder auch "C_0-Halbgruppen" nennt, begann in den dreißiger Jahren mit M.H.Stones Untersuchungen einparametriger Gruppen unitärer Operatoren auf Hilberträumen [42] E.Hille ging das Problem allgemeiner an und betrachtete einparametrige Halbgruppen stetiger, linearer Operatoren auf Banachräumen. Seine Untersuchungen sind in dem Buch "Functional Analysis and Semi-Groups" [16] bzw. dessen erweiterter Neuauflage [17] dokumentiert. Die weitere Entwicklung in der ersten Hälfte der fünfziger Jahre ist in R.S.Phillips' Übersichtsartikel [30] ausführlich beschrieben. Besondere Beiträge hierzu leisteten R.S.Phillips, W.Feller und K.Yosida . Daß das Interesse an stark stetigen Halbgruppen seit dieser Zeit nicht nachgelassen hat, ist nicht zuletzt dem Umstand zuzuschreiben, daß die Theorie mit Erfolg in anderen Gebieten angewendet werden konnte. Zu erwähnen sind insbesondere die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, die Theorie der stochastischen Prozesse sowie die Transporttheorie. Schon 1924 erkannte J.Hadamard , daß die Lösungen gewisser Differentialgleichungen die Halbgruppeneigenschaft besitzen [13 , p.622]. Und als die allgemeine Halbgruppentheorie entwickelt war, ging man daran, die Ergebnisse auf partielle Differentialgleichungen anzuwenden [8], [45]. Ausführlich sind die Verbindungen in A.Friedmans Buch [11] dargestellt. Parallel zu dieser

Entwicklung verlief die Anwendung auf stochastische Prozesse. Wegbereiter dieser Entwicklung waren E . B . Dynkin [6], W . Feller [8],[9] und G . A . Hunt [18]. Die Zusammenhänge haben ihren Niederschlag in jedem modernen Lehrbuch gefunden (z.B. [15], [21]) . In der Transporttheorie kamen halbgruppentheoretische Methoden etwas später zur Anwendung. Sie sind noch heute ein wichtiges Hilfsmittel der aktuellen Forschung auf diesem Gebiet [14] , [19] , [22] , [44] .

Daß viele der Halbgruppen, die in den Anwendungen vorkommen, aus positiven Operatoren bestehen, ist seit langem bekannt. Doch wurde diesem Aspekt nur wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Dies ist umso erstaunlicher, als schon E . Hille im Vorwort seines Buches [16] darauf hinwies, daß dieser Gesichtspunkt Beachtung verdient. Erstaunlich ist es auch deshalb, da man weiß, daß bei diskreten Halbgruppen $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Positivität starke Auswirkungen auf die Symmetrie des Spektrums und auf die Asymptotik der Halbgruppe hat [38] . Erste Ansätze, die Ergebnisse der diskreten Theorie auf den kontinuierlichen Fall zu übertragen, gehen auf S . Karlin zurück [20] . Genauere und weitergehende Aussagen stammen von R . Derndinger und R . Nagel [3] , [4] , [27] . Ihre Untersuchungen sind der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Hier wird die Entwicklung weitergeführt und auf den Stand gebracht, den man bei diskreten Halbgruppen erreicht hat. Als Leitfaden dient dabei weitgehend die Spektraltheorie positiver Operatoren, wie sie im fünften Kapitel von H . H . Schaefers Monographie [36] dokumentiert ist.

Die folgende kurze Inhaltsübersicht wird jeweils durch Erläuterungen am Anfang eines jeden Abschnittes ergänzt.

Das erste Kapitel erfüllt mehrere Funktionen. In ihm werden zum einen die Hilfsmittel aus der allgemeinen Theorie stark stetiger Halbgruppen und aus der Spektraltheorie positiver Operatoren bereitgestellt. Daneben werden Methoden vorgestellt und Schlußweisen erläutert, die in den folgenden Abschnitten ständig wiederkehren. Schließlich soll in diesem Abschnitt der Leser mit der Bezeichnungsweise vertraut gemacht werden.

Im Gegensatz zum ersten behandeln die weiteren Kapitel ausschließlich stark stetige Halbgruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden.

Im Mittelpunkt des zweiten Kapitels steht das Randspektrum dieser Halbgruppen, das ist die Menge $\{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda = s(A)\}$, wobei A der Generator und $s(A)$ die Spektralschranke der Halbgruppe ist. Es wird gezeigt, daß das Randspektrum unter gewissen Voraussetzungen imaginär additiv zyklisch ist (2.11). Ferner wird gezeigt, daß es ausschließlich aus Polen der Resolvente besteht, wenn die Spektralschranke ein Pol mit endlichdimensionalem Residuum ist (2.12). Das letztgenannte Resultat erlaubt die Verallgemeinerung einer von H.Uhlig stammenden Charakterisierung positiver Gruppen mit kompakter Resolvente (2.14).

Im dritten Kapitel werden die Eigenwerte im Randspektrum näher untersucht. So sind Bedingungen angegeben, unter denen diese Menge additiv zyklisch ist (3.5). Ein weiterer Satz behandelt das Punktspektrum irreduzibler Halbgruppen und beschreibt die Wirkung dieser Halbgruppen auf dem von den Eigenvektoren erzeugten Teilraum (3.4). Schließlich werden noch Halbgruppen positiver Kontraktionen auf L^p-Räumen betrachtet, die nichttriviales Punktspektrum besitzen (3.7).

Das letzte Kapitel ist dem asymptotischen Verhalten positiver Halbgruppen gewidmet, genauer: dem Verhalten für "$t \longrightarrow \infty$". Es wird ein "Null - Zwei Gesetz" für irreduzible Halbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm bewiesen (4.4). Daneben kommt den irreduziblen Halbgruppen, deren Spektralschranke ein Pol der Resolvente ist, Aufmerksamkeit zu (4.2 und 4.6).

Herrn Professor Dr. H.H.Schaefer danke ich herzlich für sein großes Interesse an dieser Arbeit. Ferner möchte ich der Arbeitsgruppe Funktionalanalysis Dank sagen für die interessanten Anregungen und fruchtbaren Diskussionen.

1. METHODEN UND HILFSMITTEL FÜR DIE SPEKTRALTHEORIE STARK STETIGER HALBGRUPPEN

Die Grundlagen dieser Arbeit sind die allgemeine Theorie stark stetiger Halbgruppen und die Spektraltheorie positiver Operatoren in Banachverbänden. Darüberhinaus müssen einfache Tatsachen aus der Spektraltheorie unbeschränkter, linearer Operatoren berücksichtigt werden. In den einzelnen Abschnitten dieses Kapitels werden die benötigten Fakten aus diesen drei Gebieten zusammengestellt. Viele Behauptungen sind ohne Beweis angegeben. Ausführliche Begründungen findet man in den einschlägigen Lehrbüchern. Für den ersten Abschnitt sind dies beispielsweise die Bücher von N.Dunford / J.T.Schwartz [5] und K.Yosida [46] . Sie werden bei Verweisen im Text mit DS bzw. Y angegeben. Für stark stetige Halbgruppen ist E.Hilles Monographie bzw. dessen erweiterte Neuauflage [17](im Text kurz HP) ein ausgezeichnetes Nachschlagewerk. Die beste Grundlage für den Abschnitt über Banachverbände und positive Operatoren ist H.H.Schaefers Monographie [36](kurz S).

Im ersten Abschnitt findet man zunächst einen spektralen Abbildungssatz für beschränkte lineare Operatoren (1.2). Im weiteren wird gezeigt, wie man spektraltheoretische Aussagen über gewisse unbeschränkte Operatoren auf den Fall beschränkter Operatoren zurückführen kann (1.4). Schließlich werden Pseudoresolventen eingeführt und deren

wichtigste Eigenschaften zusammengestellt (1.10).

Mit den drei wichtigen Objekten in der Theorie der stark stetigen Halbgruppen — Halbgruppe, Generator und Resolvente — befaßt sich der zweite Abschnitt. Einer Auflistung einfacher Eigenschaften folgen mehrere Beispiele. Von besonderer Bedeutung für das weitere ist Beispiel (1.21), der Fall der periodischen Halbgruppe. Anschließend werden die Beziehungen zwischen dem Spektrum des Generators einerseits und den Spektren der Operatoren der Halbgruppe andererseits untersucht (1.23). Das Hauptaugenmerk ist dabei auf Eigenwerte und Eigenvektoren sowie auf die Pole der Resolvente gerichtet. Den Abschluß bildet ein Satz über beschränkte, stark stetige Gruppen (1.25).

Im dritten Abschnitt wird zunächst ausführlich erläutert, wie man die von Funktionenverbänden bekannte Operation "Signum" in abstrakten Banachverbänden erklären kann und welche Eigenschaften dieser Signumsoperator hat. Sodann werden einige Fakten bewiesen, die in der Spektraltheorie positiver Operatoren von großer Bedeutung sind (1.32 und 1.33).

Resolventen und Pseudoresolventen

In diesem Abschnitt steht G stets für einen Banachraum und A für einen abgeschlossenen, dicht definierten, linearen Operator auf G mit Definitionsbereich $D(A) \subseteq G$.

Die Menge

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ ist eine Bijektion von } D(A) \text{ auf } G\}$$

heißt Resolventenmenge von A und das Komplement

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A) \qquad \text{das Spektrum von } A .$$

Bekanntlich ist $\sigma(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$, diese ist kompakt und nichtleer, falls A ein beschränkter Operator ist. Die folgenden Teilmengen des Spektrums sind im weiteren von Interesse:

das Residualspektrum

$$R\sigma(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \text{es gibt ein } \gamma > 0, \text{ mit } \|(\lambda - A)x\| \geq \gamma\|x\| \text{ für alle } x \in D(A)\},$$

das Punktspektrum

$$P\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{es gibt ein } x \in D(A),\ x \neq 0 \text{ mit } Ax = \lambda x\}$$

das approximative Punktspektrum

$$AP\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{es gibt eine normierte Folge } (x_n) \subseteq D(A), \text{ so daß } ((\lambda - A)x_n) \text{ eine Nullfolge ist}\} .$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt: $P\sigma(A) \subseteq AP\sigma(A)$, $\sigma(A) = R\sigma(A) \cup AP\sigma(A)$ und $R\sigma(A) \cap AP\sigma(A) = \emptyset$. Darüberhinaus ist der topologische Rand von $\sigma(A)$ stets im approximativen Punktspektrum enthalten. Für $\lambda \in \varrho(A)$ ist $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ ein stetiger, linearer Operator

auf G . Die Funktion

$$R(.,A) : \varrho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(G) \ , \ \lambda \longmapsto R(\lambda,A) = (\lambda - A)^{-1}$$

ist lokal holomorph auf $\varrho(A)$ und heißt Resolvente von A. Sie erfüllt die Resolventengleichung :

1.1 $$R(\lambda,A) - R(\mu,A) = -(\lambda - \mu)R(\lambda,A)R(\mu,A)$$

Eine äquivalente, oft nützlichere Form dieser Gleichung ist die Beziehung:

1.1' $$(Id - (\lambda - \mu)R(\lambda,A))(Id - (\mu - \lambda)R(\mu,A)) = Id$$

Der folgende, erste Satz befaßt sich mit beschränkten linearen Operatoren. Dabei handelt es sich um einen spektralen Abbildungssatz für das Punkt-, das approximative Punktspektrum sowie die Pole der Resolvente. Einzelheiten des dabei verwendeten Spektralkalküls findet man beispielsweise in [DS , VII.3] , näheres über das $\mathcal{F}$-Produkt in [S , V.1] . Unter einer nirgends konstanten Funktion verstehen wir eine auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ definierte Funktion, die auf keiner Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereiches konstant ist.

1.2 PROPOSITION Ist G ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(G)$ und f eine lokalholomorphe Funktion auf $\sigma(T)$, die nirgends konstant ist, dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$,

$P\sigma(f(T)) = f(P\sigma(T))$,

$AP\sigma(f(T)) = f(AP\sigma(T))$.

(b) Ist $w \in \sigma(f(T))$, so ist $\sigma_w := \{\mu \in \sigma(T) : f(\mu) = w\}$ endlich. w ist dann und nur dann ein isolierter Punkt von $\sigma(f(T))$, wenn jedes $\mu \in \sigma_w$ ein isolierter Punkt von $\sigma(T)$ ist. In diesem Fall gilt für die Residuen P von $R(\cdot, f(T))$ in w , bzw. P_μ von $R(\cdot, T)$ in $\mu \in \sigma_w$: $P_\mu P = PP_\mu = P_\mu$ und $P = \sum P_\mu$.

(c) $R(\cdot, f(T))$ hat genau dann in w einen Pol (der Ordnung k), wenn $R(\cdot, T)$ in allen Punkten $\mu \in \sigma_w$ Pole (der Ordnung k_μ) besitzt.
Falls die Funktion $z \longrightarrow f(z) - w$ in $\sigma(T)$ nur einfache Nullstellen hat, gilt $k = \max\{k_\mu : \mu \in \sigma_w\}$.

Beweis: (a) Die erste Behauptung ist wohlbekannt. Sie gilt im Gegensatz zu den übrigen auch ohne die Voraussetzung "f ist nirgends konstant". Nun zu Behauptung "$P\sigma(f(T)) = f(P\sigma(T))$" : Aus $Tx = \alpha x$ folgt $R(\lambda, T)x = (\lambda - \alpha)^{-1}x$ $(\lambda \in \varrho(T))$ und man erhält:
$f(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)R(z,T)x\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}x\,dz = f(\alpha)\,x$.
Damit ist die Inklusion "$f(P\sigma(T)) \subseteq P\sigma(f(T))$" bewiesen.
Ist andererseits $w \in P\sigma(f(T))$ und setzt man $G_o := \ker(w - f(T))$, dann ist $G_o \neq 0$ ein abgeschlossener, T-invarianter Teilraum von G . Die Einschränkung von T auf G_o sei T_o . Da G_o auch unter allen Resolventen $R(\lambda, T)$ $(\lambda \in \varrho(T))$ invariant ist, folgt $\sigma(T_o) \subseteq \sigma(T)$ und $R(\lambda, T_o) = R(\lambda, T)|_{G_o}$.

Somit ist $f(T_o) = f(T)_{|G_o} = w\,\mathrm{Id}$. Dies impliziert $\sigma(T_o) \subseteq \{\mu \in \sigma(T) : f(\mu) = w\} =: \sigma_w$. σ_w ist endlich, da f nirgends konstant ist, und damit ist auch $\sigma(T_o)$ endlich. Demnach gibt es ein Polynom $p \neq 0$ und eine lokal holomorphe Funktion h , die in $\sigma(T_o)$ keine Nullstellen hat, mit $f(z) - w = p(z)h(z)$. Wegen $0 \notin \sigma(h(T_o))$ ist $h(T_o)$ invertierbar und aus $0 = f(T_o) - w\,\mathrm{Id} = p(T_o)h(T_o)$ folgt dann $p(T_o) = 0$. Damit ist jedes Element $\mu \in \sigma(T_o)$ ein Eigenwert von T_o , also auch von T . Wegen $w = f(\mu) \in f(P\sigma(T))$ folgt das Gewünschte.

Die Aussage über das approximative Punktspektrum führt man wie folgt auf den eben bewiesenen Fall zurück: Ist $\hat{G}$ ein $\mathfrak{F}$-Produkt von G , dann gilt: $AP\sigma(f(T)) = P\sigma(\widehat{f(T)}) = P\sigma(f(\hat{T})) = f(P\sigma(\hat{T})) = f(AP\sigma(T))$. Die dabei verwendete Beziehung "$\widehat{f(T)} = f(\hat{T})$" folgt aus $R(\lambda, T)\hat{} = R(\lambda, \hat{T})$.

(b) Der erste Teil der Behauptung ist klar, der zweite ist ein Spezialfall von [DS , VII.3.19] .

(c) Es sei r_μ die Ordnung der Nullstelle der Funktion $z \longmapsto f(z) - w$ im Punkt $\mu \in \sigma_w$ und $p(z) := \prod (z - \mu)^{r_\mu}$. Dann gibt es eine lokalholomorphe Funktion g , die in $\sigma(T)$ keine Nullstellen hat, mit $f(z) - w = p(z)g(z)$. Hat nun $R(.,T)$ in jedem Punkt $\mu \in \sigma_w$ einen Pol der Ordnung k_μ , so gilt $(T - \mu)^{k_\mu} P_\mu = 0$ und für $k := \max\{k_\mu : \mu \in \sigma_w\}$ gilt dann: $p(T)^k P_\mu = 0$ $(\mu \in \sigma_w)$. Man erhält $(f(T) - w)^k P = g(T)^k p(T)^k (\sum P_\mu) = 0$, das

heißt: $R(.,f(T))$ hat in w einen Pol der Ordnung $\leq k$.

Nimmt man an, daß $R(.,f(T))$ in w einen Pol k-ter Ordnung besitzt, so gilt $0 = (f(T) - w)^k P = g(T)^k p(T)^k P$ (p und g wie oben). Nach Konstruktion ist $g(T)$ invertierbar und man erhält $p(T)^k P = 0$. Es folgt $\prod (T - \mu)^{kr_\mu} P_\nu = 0$ für alle $\nu \in \sigma_w$. Da für $\mu \neq \nu$ der Operator $T - \mu Id$ auf $P_\nu G$ invertierbar ist, folgt schließlich $(T - \nu Id)^{kr_\nu} P_\nu = 0$ für alle $\nu \in \sigma_w$ und das bedeutet, daß $R(.,T)$ in $\nu \in \sigma_w$ einen Pol der Ordnung $\leq kr_\nu$ hat.

Wendet man den eben bewiesenen Satz auf die Funktion $f(z) := z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ an, erhält man folgendes Korollar:

1.3 KOROLLAR Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n := \exp(\frac{2\pi i}{n})$, $T \in \mathcal{L}(G)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$.
Hat $R(.,T^n)$ in μ^n einen Pol, so hat $R(.,T)$ in den Punkten $\varepsilon_n^m \mu$ $(m = 1,2,..,n)$ Pole. Für die Polordnungen, bzw. für die Residuen gilt:
$k = \max\{k_m : m = 1,2,..,n\}$,
$P = \sum_1^n P_m$.

Der eben bewiesene Satz und das Korollar gelten für beschränkte lineare Operatoren. Bei Untersuchungen des Spektrums unbeschränkter Operatoren, kann man sich häufig mittels der Resolvente auf diesen Fall zurückziehen. Die

Grundlage dafür liefert der folgende Satz:

1.4 PROPOSITION G sei ein Banachraum, $A : D(A) \longrightarrow G$ ein abgeschlossener, dicht definierter, linearer Operator auf G, $\lambda_0 \in \varrho(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \lambda_0$. Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) $\alpha \in \sigma(A) \iff (\lambda_0 - \alpha)^{-1} \in \sigma(R(\lambda_0, A))$; die gleiche Beziehung gilt auch für das Residual-, das Punkt- und das approximative Punktspektrum.

(b) α ist genau dann ein isolierter Punkt von $\sigma(A)$, wenn $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ isolierter Punkt von $\sigma(R(\lambda_0, A))$ ist. In diesem Fall sind die Residuen der holomorphen Funktionen $R(.,A)$ und $R(.,R(\lambda_0,A))$ in den Stellen α bzw. $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ identisch. Weiter gilt: α ist dann und nur dann ein Pol k-ter Ordnung von $R(.,A)$, wenn $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ ein Pol k-ter Ordnung von $R(.,R(\lambda_0,A))$ ist.

Beweis: Zur Abkürzung setzen wir $R(\lambda) := R(\lambda, A)$ $(\lambda \in \varrho(A))$.
(a) Zunächst sei bemerkt, daß die Funktion $\alpha \longmapsto (\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vermittelt. Die Aussage über die Spektren ist somit äquivalent zu :
$\alpha \in \varrho(A) \iff (\lambda_0 - \alpha)^{-1} \in \varrho(R(\lambda_0))$.
Ist aber $\alpha \in \varrho(A)$, dann folgt aus der Resolventengleichung (1.1') $\mathrm{Id} = (\mathrm{Id} - (\lambda_0 - \alpha)R(\lambda_0))(\mathrm{Id} - (\alpha - \lambda_0)R(\alpha))$

oder $Id = ((\lambda_0 - \alpha)^{-1} - R(\lambda_0))((\lambda_0 - \alpha) + (\lambda_0 - \alpha)^2 R(\alpha))$.
Somit ist $(\lambda_0 - \alpha)^{-1} \in \varrho(R(\lambda_0))$ und es gilt:

1.5 $$R((\lambda_0 - \alpha)^{-1}, R(\lambda_0)) = (\lambda_0 - \alpha) + (\lambda_0 - \alpha)^2 R(\alpha) \quad .$$

Andererseits gilt für $\mu \in \varrho(R(\lambda_0))$, $\mu \neq 0$:
$Id = (\mu - R(\lambda_0)) R(\mu, R(\lambda_0)) = \mu(\lambda_0 - A)R(\lambda_0)R(\mu, R(\lambda_0)) -$
$R(\lambda_0)R(\mu, R(\lambda_0)) = (\lambda_0 - A - \frac{1}{\mu})\mu R(\lambda_0)R(\mu, R(\lambda_0))$
und man erhält: $\lambda_0 - \frac{1}{\mu} \in \varrho(A)$ und $R(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}) =$
$= \mu R(\lambda_0)R(\mu, R(\lambda_0)) = \mu(\mu R(\mu, R(\lambda_0)) - Id)$. Für $\mu = (\lambda_0 - \alpha)^{-1}$
folgt dann $\alpha = \lambda_0 - \frac{1}{\mu} \in \varrho(A)$ und die Formel

1.6 $$R(\alpha) = (\lambda_0 - \alpha)^{-2} R((\lambda_0 - \alpha)^{-1}, R(\lambda_0)) - (\lambda_0 - \alpha)^{-1} \quad .$$

Nun zu der Aussage über das Punktspektrum.
Ist $x \in D(A)$, $Ax = \alpha x$, so folgt $(\lambda_0 - A)x = (\lambda_0 - \alpha)x$
und man erhält $R(\lambda_0)x = (\lambda_0 - \alpha)^{-1}x$. Gilt umgekehrt
$R(\lambda_0)x = (\lambda_0 - \alpha)^{-1}x$, so folgt $x \in R(\lambda_0)G = D(A)$ und
$Ax = (\lambda_0 - \alpha)AR(\lambda_0)x = (\lambda_0 - \alpha)(\lambda_0 R(\lambda_0) - Id)x = \alpha x$.

Ist (x_n) ein approximativer Eigenvektor von A zum
Spektralwert α , so folgt aus $((\lambda_0 - \alpha)^{-1} - R(\lambda_0))x_n =$
$= (\lambda_0 - \alpha)^{-1} R(\lambda_0)((\lambda_0 - A)x_n - (\lambda_0 - \alpha)x_n) = (\lambda_0 - \alpha)^{-1} R(\lambda_0) \cdot$
$(\alpha - A)x_n$ die Abschätzung
$\|((\lambda_0 - \alpha)^{-1} - R(\lambda_0))x_n\| \leq |\lambda_0 - \alpha|^{-1} \|R(\lambda_0)\| \, \|(\alpha - A)x_n\|$.
Dies zeigt, daß (x_n) ein approximativer Eigenvektor von
$R(\lambda_0)$ zum Spektralwert $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ ist.
Nun sei (x_n) ein approximativer Eigenvektor von $R(\lambda_0)$
zum Spektralwert $\mu := (\lambda_0 - \alpha)^{-1}$. Wegen $\|(\mu - R(\lambda_0))x_n\| \longrightarrow 0$
und $\|\mu x_n\| = |\mu|$, können wir o.B.d.A annehmen, daß für

ein geeignetes $c > 0$ die Abschätzung $\|R(\lambda_o)x_n\| \geq c$ gilt. Definiert man $y_n := \|R(\lambda_o)x_n\|^{-1} R(\lambda_o)x_n$, dann liegt y_n im Definitionsbereich von A und es gilt:
$(\alpha - A)y_n = \|R(\lambda_o)x_n\|^{-1}((\lambda_o - A) - (\lambda_o - \alpha))R(\lambda_o)x_n =$
$\|R(\lambda_o)x_n\|^{-1}(\lambda_o - \alpha)(\mu - R(\lambda_o))x_n$.
Hieraus folgt $\|(\alpha - A)y_n\| \leq c^{-1}|\lambda_o - \alpha|\|(\mu - R(\lambda_o))x_n\|$ und man erhält, daß (y_n) ein approximativer Eigenvektor von A zum Spektralwert α ist.

Die Behauptung für das Residualspektrum folgt aus der eineindeutigen Beziehung $\alpha \longleftrightarrow (\lambda_o - \alpha)^{-1}$ und dem soeben Bewiesenen.

(b) Zunächst ist klar, daß mit α auch $(\lambda_o - \alpha)^{-1}$ ein isolierter Punkt ist und umgekehrt. Die Behauptung über die Residuen ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (1.6) wie folgt:
Ist Γ ein Kreis von hinreichend kleinem Radius um α, so gilt für das Residuum P von $R(.,A)$ in α :
$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(z,A)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_o - z)^{-2} R((\lambda_o - z)^{-1}, R(\lambda_o))\,dz$
$- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_o - z)^{-1}\,dz$. Ist der Kreis Γ so gewählt, daß λ_o nicht im Innern liegt, dann ist das zweite Integral Null. Die Substitution $\tilde{z} := (\lambda_o - z)^{-1}$ liefert einen einfach geschlossenen Weg $\tilde{\Gamma}$, der außer $(\lambda_o - \alpha)^{-1}$ keine Spektralwerte von $R(\lambda_o)$ umläuft. Aus $d\tilde{z} = (\lambda_o - z)^{-2}dz$ folgt $P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} R(\tilde{z}, R(\lambda_o))\,d\tilde{z}$. Dies zeigt, daß P mit dem Residuum von $R(.\,, R(\lambda_o))$ im Punkt $(\lambda_o - \alpha)^{-1}$ übereinstimmt.

Die letzte Aussage ergibt sich aus folgender Behauptung:

Für die n-ten Koeffizienten A_n und B_n der Laurentreihe von $R(.,A)$ bzw. $R(.,R(\lambda_o))$ im Punkt α bzw. $(\lambda_o - \alpha)^{-1}$ gilt : $B_{-n} = ((\lambda_o - \alpha)^{-1}R(\lambda_o))^{n-1}A_{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Der Beweis wird mit Induktion geführt.

Für $n = 1$ wurde die Behauptung bereits bewiesen.

Für $n \geq 1$ gilt: $A_{-(n+1)} = (A - \alpha)A_{-n}$,

$$B_{-(n+1)} = (R(\lambda_o) - (\lambda_o - \alpha)^{-1})B_{-n}.$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$B_{-(n+1)} = (R(\lambda_o) - (\lambda_o - \alpha)^{-1})(\lambda_o - \alpha)(\lambda_o - A)\left(\frac{R(\lambda_o)}{\lambda_o - \alpha}\right)^n A_{-n} =$$

$$= (A - \alpha)((\lambda_o - \alpha)^{-1}R(\lambda_o))^n A_{-n} = ((\lambda_o - \alpha)^{-1}R(\lambda_o))^n A_{-(n+1)} .$$

Während die Resolvente eines beschränkten linearen Operators auf einem unendlichdimensionalen Banachraum niemals kompakt ist, gibt es eine große Klasse von unbeschränkten Operatoren mit kompakter Resolvente. Dabei hat der Operator $A : D(A) \longrightarrow G$ <u>kompakte Resolvente</u> , falls $\varrho(A) \neq \emptyset$ und für ein (damit für alle) $\lambda \in \varrho(A)$ $R(\lambda, A)$ ein kompakter Operator auf G ist. Berücksichtigt man, daß die Resolvente eines kompakten Operators eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, ergibt sich aus dem eben bewiesenen Satz folgendes:

1.7 <u>KOROLLAR</u> Ist A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit kompakter Resolvente, dann ist die Resolvente von A eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

Bekanntlich ist das $\mathcal{F}$-Produkt ein nützliches Hilfsmittel bei spektraltheoretischen Untersuchungen beschränkter, linearer Operatoren [S, Chapt.V] . Im Falle unbeschränkter Operatoren treten bei der Verwendung des $\mathcal{F}$-Produktes Schwierigkeiten auf. Das sieht man an folgender Überlegung: Ist $A : D(A) \longrightarrow G$ unbeschränkt und $\hat{G}$ ein $\mathcal{F}$-Produkt von G, dann ist $0 \in AP\sigma(R(\lambda,A))$ für alle $\lambda \in \varrho(A)$. Damit ist 0 ein Eigenwert der Operatoren $R(\lambda,A)^{\wedge}$. Das heißt, die Operatoren $\{R(\lambda,A)^{\wedge}\}$ sind nicht injektiv, insbesondere sind sie nicht die Resolventen eines geeigneten Operators auf $\hat{G}$. Sie erfüllen jedoch die Resolventengleichung (1.1) bzw. (1.1') . Dies führt zu der folgenden Definition:

1.8 DEFINITION Es sei D eine offene, nichtleere Teilmenge der komplexen Zahlen, G ein Banachraum. Eine Funktion $R : D \longrightarrow \mathcal{L}(G)$ heißt Pseudoresolvente auf G, falls für alle $\lambda, \mu \in D$ die Resolventengleichung gilt, das heißt:

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)$$

oder in äquivalenter Form:

$$(Id - (\lambda - \mu)R(\lambda))(Id - (\mu - \lambda)R(\mu)) = Id \ .$$

Wir wollen zunächst einfache Eigenschaften und einige Beispiele von Pseudoresolventen angeben.

1.9 Es sei $R : D \longrightarrow \mathcal{L}(G)$ eine Pseudoresolvente auf G.

(a) R ist eine holomorphe Funktion auf D.

(b) Es sei $\lambda_0 \in D$. Zu $\mu \in \mathbb{C}$ gibt es höchstens einen Operator $S \in \mathcal{L}(G)$, der die folgende Gleichung erfüllt: $R(\lambda_0) - S = -(\lambda_0 - \mu)R(\lambda_0)S = -(\lambda_0 - \mu)SR(\lambda_0)$. Gibt es einen solchen Operator, dann erfüllt dieser die obige Gleichung für alle $\lambda \in D$. In diesem Fall sagt man: Die Pseudoresolvente läßt sich in μ fortsetzen.

(c) Ist $\lambda \in D$, dann gilt für alle μ mit $|\mu - \lambda| \leq \|R(\lambda)\|^{-1}$: $R(\mu) = \sum R(\lambda)^{n+1}(\lambda - \mu)^n$.

Aufgrund der Eigenschaften (b) und (c) besitzt jede Pseudoresolvente eine eindeutig bestimmte größte Fortsetzung.

(d) Ist A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf G mit $\varrho(A) \neq \emptyset$, dann ist $R : \varrho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(G)$, $\lambda \longmapsto R(\lambda, A)$ eine Pseudoresolvente auf G. Ist $\hat{G}$ ein $\mathcal{F}$-Produkt von G, dann ist $\hat{R} : \varrho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(\hat{G})$, $\lambda \longmapsto R(\lambda, A)\hat{}$ eine Pseudoresolvente auf $\hat{G}$. Falls A unbeschränkt ist, ist $\hat{R}$ keine Resolvente!

(e) Ist $R : D \longrightarrow \mathcal{L}(G)$ eine Pseudoresolvente auf G, dann ist $R' : D \longrightarrow \mathcal{L}(G')$, $\lambda \longrightarrow R(\lambda)'$ eine Pseudoresolvente auf G'.

(f) Ist G_o ein abgeschlossener, linearer Teilraum von G und gilt $R(\lambda)G_o \subseteq G_o$ für alle $\lambda \in D$, dann bilden die Einschränkungen der Operatoren $R(\lambda)$ auf G_o eine Pseudoresolvente $R_|$ auf G_o. Ebenso bilden die von $R(\lambda)$ auf G/G_o induzierten Operatoren eine Pseudoresolvente $R_/$ auf G/G_o.

Auf den zuletzt geschilderten Fall beziehen sich zweite und dritte Aussage des folgenden Satzes.

1.10 PROPOSITION G sei ein Banachraum, $R : D \longrightarrow \mathcal{L}(G)$ eine Pseudoresolvente auf G.

(a) Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in G$, dann erfüllen entweder alle $\lambda \in D$ oder kein $\lambda \in D$ die Gleichung $(\lambda - \alpha)R(\lambda)x = x$.

Im weiteren sei G_o ein abgeschlossener, linearer Teilraum von G, $\mu \in \bar{D} \setminus D$ und es gelte $R(\lambda)G_o \subseteq G_o$ für alle $\lambda \in D$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Pseudoresolvente $R : D \longrightarrow \mathcal{L}(G)$ läßt sich in μ fortsetzen.

(ii) Die Pseudoresolventen $R_| : D \longrightarrow \mathcal{L}(G_o)$ und $R_/ : D \longrightarrow \mathcal{L}(G/G_o)$ lassen sich in μ fortsetzen.

(iii) Für ein (alle) $\lambda \in D$ ist $(\lambda - \mu)^{-1} \in \varrho(R(\lambda))$.

(c) R hat dann und nur dann einen Pol in μ, wenn sowohl R_1 als auch R_2 in μ einen Pol haben. Für die entsprechenden Polordnungen k, k_1, bzw. k_2 gilt: $\max\{k_1, k_2\} \leq k \leq k_1 + k_2$.

Bevor wir den Satz beweisen eine Anmerkung zu der Voraussetzung für Aussage (b) bzw. (c).
Wenn D zusammenhängend ist, dann genügt es wegen (1.9 c) zu fordern, daß G_o unter einem Operator $R(\lambda)$ invariant ist.

Beweis: Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Resolventengleichung.

(b) "(i) $\Longrightarrow$ (ii)": Läßt sich R in μ fortsetzen, und ist $S \in \mathcal{L}(G)$ diese Fortsetzung, dann folgt aus Stetigkeitsgründen ($\mu \in \bar{D}$!) $S(G_o) \subseteq G_o$. Die Einschränkung von S auf G_o bzw. der von S auf G/G_o induzierte Operator liefern die gewünschte Fortsetzung von R_1 bzw. R_2.

"(ii) $\Longrightarrow$ (iii)": Es sei $\lambda \in D$. Nach Voraussetzung existieren Operatoren $S_1 \in \mathcal{L}(G_o)$, $S_2 \in \mathcal{L}(G/G_o)$ mit
$(Id - (\lambda-\mu)R_1(\lambda))(Id - (\mu-\lambda)S_1) = (Id - (\mu-\lambda)S_1)(Id - (\lambda-\mu)R_1(\lambda)) = Id$
$(Id - (\lambda-\mu)R_2(\lambda))(Id - (\mu-\lambda)S_2) = (Id - (\mu-\lambda)S_2)(Id - (\lambda-\mu)R_2(\lambda)) = Id$
Dies bedeutet $(\lambda-\mu)^{-1} \in \varrho(R(\lambda)_1) \cap \varrho(R(\lambda)_2)$ und daraus folgt $(\lambda-\mu)^{-1} \in \varrho(R(\lambda))$.

"(iii) $\Longrightarrow$ (i)": Setzt man $S := (\lambda-\mu)^{-2}((\lambda-\mu)^{-1} - R(\lambda))^{-1} - (\lambda-\mu)^{-1}$, dann gilt $(Id - (\mu-\lambda)S) = (Id - (\lambda-\mu)R(\lambda))^{-1}$

und man erkennt, daß S die in (1.9 b) angegebene Gleichung erfüllt.

(c) Aufgrund von Aussage (b) können wir annehmen, daß für geeignetes $\delta > 0$ die Menge $\{\lambda \in D : 0 < |\lambda - \mu| < \delta\}$ in D enthalten ist. Dann haben die Funktionen R, $R_|$ und $R_/$ Laurententwicklungen im Punkt μ. Sind A_n die Koeffizienten der Laurentreihe von R, dann folgt aus der Voraussetzung $R(\lambda)G_o \subseteq G_o$ $(\lambda \in D)$, daß G_o unter allen Operatoren A_n invariant ist. Bezeichnet man die Einschränkung von A_n auf G_o mit $A_{n|}$ und den von A_n auf G/G_o induzierten Operator mit $A_{n/}$, dann gilt:

$$R(\lambda) = \sum A_n(\lambda - \mu)^n ,$$
$$R_|(\lambda) = \sum A_{n|}(\lambda - \mu)^n ,$$
$$R_/(\lambda) = \sum A_{n/}(\lambda - \mu)^n .$$

Nun ist klar, daß mit R auch $R_|$ und $R_/$ Pole in haben, und daß für die Polordnungen $\max\{k_|, k_/\} \leq k$ gilt.

Hat $R_|$ in μ einen Pol s-ter Ordnung, dann gilt $A_{-(s+1)|} = 0$ oder $A_{-(s+1)}(G_o) = \{0\}$. Und falls $R_/$ in μ einen Pol r-ter Ordnung besitzt, gilt $A_{-(r+1)/} = 0$ oder $A_{-(r+1)}(G) \subseteq G_o$. Man erhält $A_{-(s+1)}A_{-(r+1)} = 0$ und aus der für alle $r, s \geq 0$ gültigen Beziehung

(*) $A_{-(r+1)}A_{-(s+1)} = A_{-(s+1)}A_{-(r+1)} = A_{-(r+s+1)}$

folgt $A_{-(r+s+1)} = 0$, das heißt, R hat in μ einen Pol der Ordnung $\leq r+s$. Die Beziehung (*) folgt aus der Darstellung $A_{-(n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - \mu)^n R(\lambda)\, d\lambda$ $(n \geq 0)$, wenn man berücksichtigt, daß R die Resolventengleichung erfüllt.

Stark stetige Halbgruppen

Wenn in dieser Arbeit von stark stetigen Halbgruppen $\{T(t)\}$ die Rede ist, so ist das folgende gemeint:

1.11 (a) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist $T(t)$ ein stetiger linearer Operator auf einem (festen) Banachraum G;

(b) es gilt $T(o) = Id$ und $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$;

(c) die Abbildung $t \longmapsto T(t)$ ist stetig für die starke Operatortopologie auf $\mathcal{L}(G)$, anders ausgedrückt: Die Funktion $T(.)x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow G$, $t \longmapsto T(t)x$ ist für jedes $x \in G$ stetig.

Ersetzt man in 1.11(a) - (c) $\mathbb{R}_+$ durch $\mathbb{R}$, dann erhält man die Definition der stark stetigen Gruppe. In diesem Fall sind die Operatoren $T(t)$ invertierbar und es gilt $T(t)^{-1} = T(-t)$. Stark stetige Halbgruppen (bzw. Gruppen) nennen manche Autoren auch C_o-Halbgruppen (bzw. C_o-Gruppen). Diese Objekte wurden zuerst von E. Hille, R. S. Phillips und K. Yosida systematisch untersucht. Im folgenden sollen die für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften stark stetiger Halbgruppen aufgelistet werden. Einzelheiten und Beweise findet man in [HP] aber auch in [DS] und [Y].

Beim Studium stark stetiger Halbgruppen hat man es mit drei Objekten zu tun: der Halbgruppe , dem Generator und der Resolvente.

Die Halbgruppe

Ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G , dann gilt für geeignete reelle Zahlen $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$

1.12 $\quad \|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$

Die Größe $\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{es gibt } M, \text{ so daß } 1.12 \text{ gilt}\}$ heißt Abszisse der absoluten Konvergenz . Für diese gilt: $-\infty \leq \omega_0 < \infty$,

$$\omega_0 = \inf\{\tfrac{1}{t}\log\|T(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\} = \lim_{t\to\infty}(\tfrac{1}{t}\log\|T(t)\|),$$

$$e^{\omega_0 t} = r(T(t)) \text{ (= Spektralradius von } T(t)\text{).}$$

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$, dann ist für jedes $x \in G$ die Funktion $t \longmapsto T(t)x$ absolut integrierbar, das heißt $\int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|dt < \infty$. Umgekehrt kann man zeigen [29] , daß ω_0 durch diese Eigenschaft charakterisiert ist.

Der Generator

Die Menge $D(A) := \{x \in G : \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existiert}\}$ ist ein dichter, linearer Teilraum von G , und die Abbildung $A : D(A) \longrightarrow G$, $x \longmapsto \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(t)x - x)$

ist ein abgeschlossener , dicht definierter, linearer Operator auf G . $(A, D(A))$ heißt Generator (oder Erzeuger) der Halbgruppe $\{T(t)\}$. Der Definitionsbereich $D(A)$ ist invariant unter allen Operatoren $T(t)$ und besteht genau aus denjenigen Elementen $x \in G$, für die die Funktion $T(.)x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow G$, $t \longmapsto T(t)x$ differenzierbar ist. Für die Ableitung gilt:

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad (x \in D(A)) .$$

Elemente der Form $\int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x\, ds$ $(t > 0, x \in G, \lambda \in \mathbb{C})$ liegen stets im Definitionsbereich. Darüberhinaus gelten die Beziehungen:

$$1.13 \quad (Id - e^{-\lambda t}T(t))x = (\lambda - A) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x\, ds \qquad (x \in G),$$

$$(Id - e^{-\lambda t}T(t))x = \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(\lambda - A)x\, ds \qquad (x \in D(A)).$$

Die Resolvente

Aus der Definition von ω_0 folgt, daß für jedes $x \in G$ die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Funktion $t \longmapsto e^{-\lambda t}T(t)x$ Bochner-integrierbar ist, sofern $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$. Setzt man $y_t := \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x\, ds$, $y := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\, ds$, dann folgt aus Gleichung (1.13) : $Ay_t = \lambda y_t + e^{-\lambda t}T(t)x - x$. Das heißt, Ay_t strebt für $t \longrightarrow \infty$ gegen $\lambda y - x$. Da A abgeschlossen ist, folgt $y \in D(A)$ und $(\lambda - A)y = x$. Dies zeigt, daß die komplexen Zahlen λ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ in der Resolventenmenge von A liegen, und daß die Resolvente die folgende Darstellung besitzt:

1.14 $$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\, ds \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0, x \in G).$$

Mit anderen Worten: Die Resolvente ist die Laplace-Transformierte der Halbgruppe.

Die Gleichung 1.14 gilt noch etwas allgemeiner:

1.14' $$R(\lambda, A)^{n+1}x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)x\, ds \quad (n \geq 0, \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0).$$

Für alle Resolventen (ohne die Einschränkung "Re $\lambda > \omega_0$") folgt aus den Gleichungen (1.13) die folgende Beziehung:

1.15 $$(Id - e^{-\lambda t}T(t))R(\lambda, A) = R(\lambda, A)(Id - e^{-\lambda t}T(t)) = \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)\, ds \qquad (\lambda \in \varrho(A)).$$

Das rechtsstehende Integral ist dabei punktweise erklärt, das heißt $$\left(\int_0^t e^{-\lambda s} T(s)\, ds\right)(x) := \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x\, ds \quad (x \in G).$$

Wie man aus der Resolvente den Generator bzw. die Halbgruppe gewinnen kann, zeigen die folgenden Gleichungen:

1.16
$$\lim_{\lambda \to \infty} R(\lambda, A)x = 0 \qquad (x \in G)$$
$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \qquad (x \in G)$$
$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda R(\lambda, A)x - x) = Ax \qquad (x \in D(A))$$
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^n x = T(t)x \qquad (t > 0, x \in G)$$

Wir wollen nun einige Beispiele angeben und näher beschreiben.

1.17 Konstruktion neuer Halbgruppen

Es sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banachraum G, G_o ein abgeschlossener Teilraum von G, der unter allen Operatoren $T(t)$ invariant ist, wir sagen dann: "G_o ist ein $\{T(t)\}$-invarianter Teilraum". Die Einschränkungen der Operatoren $T(t)$ auf G_o definieren eine stark stetige Halbgruppe $\{T_|(t)\}$ auf G_o. Außerdem wird durch die von $T(t)$ auf G/G_o induzierten Operatoren eine stark stetige Halbgruppe $\{T_/(t)\}$ auf G/G_o erklärt. Ist $q : G \longrightarrow G/G_o$ die Quotientenabbildung, dann gilt für die Generatoren $A_|$ und $A_/$ dieser Halbgruppen (vgl. [3, Kap.1.D]).

$$D(A_|) = D(A) \cap G_o \,, \quad A_| x = Ax \qquad (x \in D(A) \cap G_o) \,,$$
$$D(A_/) = q(D(A)) \,, \quad A_/ q(x) = q(Ax)) \qquad (x \in D(A)) \,.$$

Für die Resolventenmengen der Operatoren $A, A_|, A_/$ gilt

$$\varrho_+(A) \subseteq \varrho(A_|) \cap \varrho(A_/) \subseteq \varrho(A) \subseteq (\varrho(A_|) \cap \varrho(A_/)) \cup (\sigma(A_|) \cap \sigma(A_/)).$$

Dabei ist $\varrho_+(A)$ diejenige Zusammenhangskomponente von $\varrho(A)$, die nach rechts unbeschränkt ist.

Nun zu zwei anderen Konstruktionen.
Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und definiert man $S(t) := e^{\lambda t} T(t)$, $R(t) := T(rt)$, dann sind $\{S(t)\}$ und $\{R(t)\}$ stark stetige Halbgruppen auf G. Für die Generatoren B bzw. C von $\{S(t)\}$ bzw. $\{R(t)\}$ gilt:

$$D(B) = D(C) = D(A) \,, \quad B = A + \lambda \cdot \mathrm{Id} \,, \quad C = rA$$

Für die Spektren dieser Operatoren gilt somit

$\sigma(B) = \sigma(A) + \lambda$, $\sigma(C) = r^{-1}\sigma(A)$.

Die Konstruktion von $\{S(t)\}$ zeigt, daß man sich bei spektraltheoretischen Untersuchungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall "$\omega_o = 0$" zurückziehen kann, sofern $\omega_o \neq -\infty$ ist.

1.18 Normstetige Halbgruppen

Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt normstetig , falls die Abbildung $T(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(G)$, $t \longmapsto T(t)$ für die von der Operatornorm erzeugten Topologie auf $\mathcal{L}(G)$ stetig ist. Beispiele solcher Halbgruppen erhält man wie folgt: Ist $B \in \mathcal{L}(G)$ und setzt man $T(t) := e^{tB} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} B^n$, dann ist $\{T(t)\}$ eine normstetige Halbgruppe, sogar eine Gruppe. Der Generator dieser Halbgruppe ist B , also ein beschränkter, linearer Operator auf G . Die Umkehrung der letzten Aussage gilt ebenfalls [DS . VIII.1.2] :

Ist $\{T(t)\}$ eine normstetige Halbgruppe, so ist der Generator ein beschränkter, linearer Operator auf G .

1.19 Multiplikationshalbgruppen

Es sei $G := C_o(X)$ (X lokalkompakt) und $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf X mit $\sup\{\mathrm{Re}\, h(x) : x \in X\} < \infty$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ wird durch $T(t)f(x) := \exp(th(x))\, f(x)$ ($f \in G$, $x \in X$) ein stetiger, linearer Operator auf G

definiert. $\{T(t)\}$ ist dann eine stark stetige Halbgruppe mit $\omega_0 = \sup\{\operatorname{Re} h(x) : x \in X\}$. Für den Generator dieser Halbgruppe gilt:

$D(A) = \{f \in G : f \cdot h \in G\}$, $Af = hf$, $\sigma(A) = \overline{h(X)}$.

Die Resolvente ist gegeben durch

$R(\lambda, A)f = (\lambda - h)^{-1} f \quad (\lambda \in \varrho(A), \ f \in G)$.

Durch eine analoge Konstruktion erhält man Halbgruppen auf den Räumen $L^p(\mu)$, wobei (X, Σ, μ) ein Maßraum ist und $1 \leq p < \infty$.

Diese Beispiele zeigen, daß jede abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$, die nach rechts beschränkt ist, als Spektrum eines Generators einer stark stetigen Halbgruppe auftreten kann. Daß das Spektrum auch leer sein kann, ergibt sich aus dem folgenden Beispiel.

1.20 Translationshalbgruppen

Es sei $G = C_0(\mathbb{R}_+)$ oder $G = L^p(\mathbb{R}_+)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Definiert man für $t \geq 0$: $T(t)f(x) = f(x+t)$ $(f \in G, x \in \mathbb{R}_+)$, dann ist $T(t) \in \mathcal{L}(G)$ und $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G mit $\omega_0 = 0$. Für den Generator gilt:

$D(A) = \{f \in G : f$ absolut stetig, $f' \in G\}$,

$Af = f'$,

$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$,

$R(\lambda, A)f(x) = e^{\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda s} f(s)\, ds \quad (\lambda \in \varrho(A))$,

Betrachtet man an Stelle von $L^p(\mathbb{R}_+)$ Räume $L^p(\mathbb{R}_+, \mu)$, wobei das Maß μ eine positive, stetige Dichte w

bezüglich des Lebesgueschen Maßes besitzt, dann liefern die oben definierten Operatoren $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}_+,\mu)$.

Für $w(x) := (1 + x^2)^{-1}$ erhält man eine Halbgruppe vom Typ $\omega_0 = 0$. Jedoch ist die Familie $\{T(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ nicht mehr beschränkt in $\mathcal{L}(G)$.

Für $w(x) := \exp(x^2)$ erhält man eine Halbgruppe vom Typ $\omega_0 = -\infty$. In diesem Fall ist das Spektrum des Generators leer und die Darstellung (1.14) gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.21 Periodische Halbgruppen

Eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt periodisch, falls $T(t_0) = Id$ für ein $t_0 > 0$. Gibt es wenigstens ein $t_1 > 0$ mit $T(t_1) \neq Id$, dann sagen wir, die Halbgruppe sei nicht trivial. Die kleinste Zahl $t > 0$, für die $T(t) = Id$ gilt, heißt Periode der Halbgruppe. Sie soll im folgenden mit τ bezeichnet werden. Periodische Halbgruppen sind stets Gruppen, denn für $0 \leq t \leq n\tau$ gilt $T(t)^{-1} = T(n\tau - t)$, außerdem gilt stets $\omega_0 = 0$.

Aus der Gleichung (1.15) folgt für die Resolvente:

$$R(\mu, A) = (1 - e^{-\mu\tau})^{-1} \int_0^\tau e^{-\mu s} T(s)\, ds \qquad (\mu \in \varrho(A)).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Resolvente eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, die nur in den Punkten $\mu_n := \frac{2\pi ni}{\tau}$ $(n \in \mathbb{Z})$ Pole der Ordnung kleiner gleich eins besitzt. Für das Residuum P_n in μ_n gilt:

$$P_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-\mu_n s} T(s)\, ds \quad (n \in \mathbb{Z}) ,$$

das heißt, P_n ist der n-te Fourierkoeffizient der periodischen Funktion $s \longmapsto T(s)$. Weiter gilt:

$P_n P_m = 0$, falls $n \neq m$;
$\operatorname{lin} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n G$ ist dicht in G ;
$x = \sum_{-\infty}^{\infty} P_n x$, falls $x \in D(A)$;
$T(t)x = \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{2\pi n i}{\tau} t) P_n x$, falls $x \in D(A)$;
$Ax = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi n i}{\tau} P_n x$, falls $x \in D(A^2)$.

Wir wollen die dritte Aussage beweisen. Zweite, vierte und fünfte sind einfache Folgerungen dieser Behauptung. O.B.d.A. sei $\tau = 2\pi$. Zunächst zeigen wir, daß für $x \in D(A)$ die Reihe $\sum P_n x$ summierbar ist. Setzt man $y := Ax$, so gilt $P_n y = P_n Ax = in P_n x$ oder $P_n x = \frac{1}{in} P_n y$. Für jede endliche Teilmenge $H \subseteq \mathbb{Z}$ und jede stetige Linearform $x' \in E'$ gilt dann:

$$|\sum_H \langle P_n x, x' \rangle| = |\sum_H \frac{1}{in} \langle P_n y, x' \rangle| \leq (\sum_H \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} (\sum_H |\langle P_n y, x' \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Den zweiten Faktor kann man mit Hilfe der Besselschen Ungleichung abschätzen:

$$\sum_H |\langle P_n y, x' \rangle|^2 \leq \int_0^{2\pi} |\langle T(s)y, x' \rangle|^2 ds \leq \|x'\|^2 \int_0^{2\pi} \|T(s)y\|^2 ds .$$

Setzt man $C := (\int_0^{2\pi} \|T(s)y\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$, dann erhält man für alle endlichen Teilmengen $H \subseteq \mathbb{Z}$: $\|\sum_H P_n x\| \leq C (\sum_H \frac{1}{n^2})$. Damit ist gezeigt, daß die Reihe summierbar ist.

Setzen wir $y := \sum P_n x$, dann stimmen für alle $x' \in E'$ die Fourierkoeffizienten der stetigen Funktionen $s \longmapsto \langle T(s)y, x' \rangle$ einerseits und $s \longmapsto \langle T(s)x, x' \rangle$

andererseits überein. Damit sind die Funktionen identisch, insbesondere gilt $\langle y,x'\rangle = \langle T(0)y,x'\rangle = \langle T(0)x,x'\rangle = \langle x,x'\rangle$ Da $x' \in E'$ beliebig ist, folgt schließlich aus dem Satz von Hahn-Banach $x = y = \sum P_n x$.

Die obigen Eigenschaften erlauben es, die periodischen, normstetigen Halbgruppen zu charakterisieren und zwar wie folgt: Es gibt eine Familie paarweise orthogonaler Projektionen $\{P_n : -m \leq n \leq m\}$ mit $\sum_{-m}^{m} P_n = Id$, so daß $T(t) = \sum_{-m}^{m} \exp(\frac{2\pi ni}{\tau} t) P_n$ und $Ax = \sum_{-m}^{m} \frac{2\pi ni}{\tau} P_n$.

Konkrete Beispiele periodischer Halbgruppen sind die Rotationen auf $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dabei sei $G = C(\Gamma)$ oder $G = L^p(\Gamma, m)$ $(1 \leq p < \infty$, m das Haarsche Maß auf $\Gamma)$. Ist $\tau > 0$ und definiert man für $t \in \mathbb{R}_+$

$$R_\tau(t)f(z) := f(z \exp(\tfrac{2\pi i}{\tau} t)) \qquad (f \in G\,,\ z \in \Gamma)\,,$$

dann ist $\{R_\tau(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G mit Periode τ . Für den Generator dieser sogenannten Rotationshalbgruppe auf Γ gilt:

$D(A) = \{f \in G : f$ absolut stetig, $f' \in G\}$,

$Af(z) = \frac{2\pi i}{\tau} z f'(z) \qquad (z \in \Gamma)$,

$\sigma(A) = \{\frac{2\pi ni}{\tau} : n \in \mathbb{Z}\}$,

das Residuum in $\frac{2\pi ni}{\tau}$ ist der Operator $P_n = z^{-n} \otimes z^n$.

Nun wollen wir kurz erläutern, wie man eine Halbgruppe in kleinere Bestandteile zerlegen kann. Ist $\{T(t)\}$ eine

stark stetige Halbgruppe auf G und $P \in \mathcal{L}(G)$ eine Projektion, die mit jedem Operator $T(t)$ vertauschbar ist, dann sagt man: P reduziert die Halbgruppe $\{T(t)\}$.
In diesem Fall sind die abgeschlossenen Teilräume $G_1 := PG$ und $G_2 := \ker P$ $\{T(t)\}$-invariant und die Einschränkungen der Operatoren $T(t)$ definieren stark stetige Halbgruppen $\{T_i(t)\}$ auf G_i. Der Generator von $\{T_i(t)\}$ sei A_i, der Typ ω_{oi} und die Spektralschranke $s(A_i)$ $(i = 1, 2)$.
Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende Satz:

1.22 PROPOSITION Es sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G, A der Generator, $P \in \mathcal{L}(G)$ ein eine Projektion.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) P reduziert die Halbgruppe.

(ii) $P(D(A)) \subseteq D(A)$ und $PA = AP$.

(iii) Für ein (alle) $\lambda \in \varrho(A)$ gilt $R(\lambda, A)P = PR(\lambda, A)$.

(b) Reduziert P die Halbgruppe, dann gilt:

$$D(A_i) = D(A) \cap G_i \quad , \quad A_i = A|_{D(A_i)} \quad (i = 1, 2) \, ,$$
$$\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) = \sigma(A) \, , \quad s(A) = \max\{s(A_1), s(A_2)\} \, ,$$
$$\sigma(T_1(t)) \cup \sigma(T_2(t)) = \sigma(T(t)) \quad , \quad \omega_o = \max\{\omega_{01}, \omega_{02}\} .$$

(c) Ist $s > 0$, dann reduziert jede Spektralprojektion des Operators $T(s)$ die Halbgruppe.

Beweis: (a) Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist klar, die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt aus den Formeln

$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$ bzw.

$T(t)x = \lim (\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}, A))^n x$ (vgl. 1.14 und 1.16) .

(b) folgt unter Verwendung von (a) .

(c) Da $T(s)$ mit allen Operatoren $T(t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ vertauscht, gilt dies auch für jede Spektralprojektion von $T(s)$.

Die restlichen Ausführungen dieses Abschnittes sind dem Spektrum stark stetiger Halbgruppen gewidmet. Darunter verstehen wir das Spektrum des Generators der stark stetigen Halbgruppe. Im Falle stark stetiger Gruppen stimmt dies mit dem von Arveson eingeführten Spektrum von Darstellungen lokalkompakter Gruppen überein (vgl. [7],[31]). Wie wir oben sahen (vgl. die Ausführungen vor 1.14), ist das Spektrum einer stark stetigen Halbgruppe stets in einer linken Halbebene enthalten. Genauer gilt:

> Ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G vom Typ ω_0 , dann gilt $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leq \omega_0\}$.

Die Größe $s(A) := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ heißt Spektralschranke der Halbgruppe, dabei sei $\sup \emptyset = -\infty$. Es gilt:

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < \infty \ .$$

Die Frage, ob bzw. wann $s(A)$ und ω_0 zusammenfallen, wird weiter unten näher diskutiert (2.4). An dieser Stelle sei nur gesagt, daß $s(A)$ kleiner als ω_0 sein kann.

In so einem Fall gilt $\sigma(T(t)) \neq e^{t\sigma(A)}$, das heißt, der für normstetige Halbgruppen stets gültige spektrale Abbildungssatz " $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)}$ " ist für beliebige stark stetige Halbgruppen falsch. Welche Beziehungen zwischen $\sigma(T(t))$ und $\sigma(A)$ bestehen, zeigt der nächste Satz.

1.23 PROPOSITION Es sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G , $\sigma(A)$ das Spektrum , $\mu \in \mathbb{C}$ und $s > 0$.

(a) $e^{s\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(s))$, $e^{sAP\sigma(A)} \subseteq AP\sigma(T(s))$, $e^{sP\sigma(A)} = P\sigma(T(s)) \setminus \{0\}$

(b) $\ker(\mu - A) = \bigcap_{t \geq 0} \ker(e^{\mu t} - T(t))$

$\ker(e^{\mu s} - T(s)) = \overline{\operatorname{lin}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \ker(\mu + i\frac{2\pi n}{s} - A)$

(c) Ist $e^{\mu s}$ ein Pol k-ter Ordnung von $R(.,T(s))$, P das Residuum, Q der k-te Koeffizient der Laurentreihe von $R(.,T(s))$ in $e^{\mu s}$, dann gilt: $\{\mu + i\frac{2\pi n}{s} : n \in \mathbb{Z}\}$ besteht ausschließlich aus Polen von $R(.,A)$ der Ordnung $\leq k$ und für die Residuen P_n bzw. k-ten Koeffizienten Q_n in $\mu + i\frac{2\pi n}{s}$ gilt:

$PG = \overline{\operatorname{lin}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n G$,

$Q_n = (se^{\mu s})^{1-k} Q \frac{1}{s} \cdot \int_0^s \exp(-(\mu + i\frac{2\pi n}{s})t)\, T(t)\, dt$

Bevor wir diesen Satz beweisen, folgen zwei Bemerkungen.

Daß bei den Aussagen über das Spektrum und das approximative Punktspektrum in (a) nicht Gleichheit gelten kann, sieht man beispielsweise an der Rotationshalbgruppe (1.21) . In diesem Fall ist $\sigma(A)$ abzählbar, während für gewisse $t > 0$ $\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ überabzählbar ist. Zwar gilt in diesem Fall $(e^{t\sigma(A)})^{-} = \sigma(T(t))$, doch auch diese Relation ist im allgemeinen nicht erfüllt.

Eine zu (b) analoge Beziehung gilt auch für die Eigenräume von A' bzw. $T(s)'$. Dabei ist der Normabschluß durch den Abschluß in der $\sigma(E',E)$-Topologie zu ersetzen.

Beweis von 1.23 : Aufgrund der in (1.17) angegebenen Konstruktionen, können wir o.B.d.A. $\mu = 0$ und $s = 2\pi$ annehmen.
(a) Die ersten beiden Relationen folgen aus (1.13), die dritte ergibt sich aus (b) .

(b) Aus (1.13) folgt zunächst $\ker A \subseteq \ker(1 - T(t))$. Ist andererseits $T(t)x = x$ für alle $t \geq 0$, so folgt $Ax = \lim \frac{1}{t}(x - x) = 0$. Damit ist die erste Gleichung bewiesen, welche ihrerseits $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \ker(in - A) \subseteq \ker(1 - T(2\pi))$ nach sich zieht. Die Einschränkung $\{T_1(t)\}$ von $\{T(t)\}$ auf den $\{T(t)\}$-invarianten Teilraum $G_0 := \ker(1 - T(2\pi))$ ist periodisch, folglich gilt $\overline{\operatorname{lin}} \bigcup \ker(in - A_1) = G_0$ (1.21), und man erhält $\overline{\operatorname{lin}} \bigcup \ker(in - A) \supseteq G_0 = \ker(1 - T(2\pi))$.

(c) Zunächst folgt aus (a), daß für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, die Menge $V := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |e^{\lambda 2\pi} - 1| < \varepsilon\}$ in der Resolventenmenge von A liegt. Aus (1.15) folgt $R(\lambda, A) = R(e^{-\lambda 2\pi}, T(2\pi)) e^{\lambda 2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda t} T(t)\, dt$, falls $\lambda \in V$. Da die Funktionen $\lambda \longmapsto e^{-\lambda 2\pi}$ und $\lambda \longmapsto e^{\lambda 2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda t} T(t)\, dt$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind und $R(.,T(2\pi))$ in 1 einen Pol k-ter Ordnung hat, folgt dann, daß $R(.,A)$ in $\{\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda 2\pi} = 1\} = \{in : n \in \mathbb{Z}\}$ nur Pole gleicher oder kleinerer Ordnung haben kann.

Das Residuum P von $R(.,T(2\pi))$ in 1 reduziert nach (1.22c) die Halbgruppe. Es gilt $1 \in \sigma(T_2(2\pi))$, wobei $T_2(t) := T(t)|_{\ker P}$ und aus $e^{2\pi\sigma(A_2)} \subseteq \sigma(T_2(2\pi))$ folgt, daß $R(.,A_2)$ in $\{in : n \in \mathbb{Z}\}$ holomorph ist. Diese Überlegung zeigt, daß man o.B.d.A. $G = PG$ oder $P = Id$ annehmen kann. Nun sei P_n das Residuum von $R(.,A)$ in in $(n \in \mathbb{Z})$, $G_o := \overline{\operatorname{lin}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n G$. Wäre $G_o \neq G$, dann folgt für die auf G/G_o induzierte Halbgruppe $\{T_/(t)\}$: $\sigma(A_/) = \emptyset$ und $P\sigma(T_/(2\pi)) = \{1\}$. Dies steht im Widerspruch zu (a).

Die Formeln für die k-ten Koeffizienten ergeben sich, wenn man in die Formel $Q_n = \lim_{\mu \to 0} \mu^k R(in + \mu, A)$ die Gleichung $R(\lambda, A) = R(e^{-\lambda 2\pi}, T(2\pi))\, e^{\lambda 2\pi} \int_0^s e^{-\lambda t} T(t)\, dt$ einsetzt.

Wir wollen einen Spezialfall des eben bewiesenen Satzes festhalten:

1.24 KOROLLAR Ist 1 ein Pol erster Ordnung der Resolvente eines Operators $T(s)$ $(s>0)$ und P das Residuum, dann gilt:

(a) P reduziert die Halbgruppe und $\{T(t)\}_{|PG}$ ist periodisch.

(b) Die Resolvente hat in $\{i\frac{2\pi n}{s} : n\in\mathbb{Z}\}$ nur Pole der Ordnung ≤ 1. Für das Residuum P_n in $i\frac{2\pi n}{s}$ gilt: $P_n = \frac{1}{s}\int_0^s \exp(-i\frac{2\pi n}{s}t)\,T(t)\,dt\cdot P$

Nun wollen wir uns noch kurz mit dem Spektrum stark stetiger Gruppen $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ beschäftigen.
Ist A der Generator der Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, dann ist $-A$ der Generator der stark stetigen Halbgruppe $\{T(-t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Für die Abszissen der absoluten Konvergenz ω_{0+} und ω_{0-} dieser beiden Halbgruppen gilt $\omega_{0+}+\omega_{0-}\geq 0$.
Aus $\sigma(A)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda\leq\omega_{0+}\}$ und $\sigma(-A)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda\leq\omega_{0-}\}$ folgt dann $\sigma(A)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} : -\omega_{0-}\leq\mathrm{Re}\,\lambda\leq\omega_{0+}\}$, das heißt das Spektrum des Generators liegt in einem Streifen. Für beschränkte Gruppen (d.h. $\sup\{\|T(t)\| : t\in\mathbb{R}\}<\infty$) gilt $\omega_{0+}=\omega_{0-}=0$ und man erhält $\sigma(A)\subseteq i\mathbb{R}$. In diesem Fall kann man mehr über das Spektrum aussagen, wie der letzte Satz dieses Abschnittes zeigt. Zunächst einige Erläuterungen.

Ist $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine beschränkte Gruppe auf G, $f\in L^1(\mathbb{R})$, dann sind die Funktionen $t\longmapsto f(t)\cdot T(t)x$ $(x\in G)$

Bochner-integrierbar. Setzt man $T(f)x := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)T(t)x\,dt$, dann ist $T(f) \in \mathcal{L}(G)$ und es gilt $\|T(f)\| \leq \|f\|_1 \cdot \sup\{\|T(t)\| : t \in \mathbb{R}\}$. Die Vorschrift $f \longmapsto T(f)$ definiert somit eine stetige, lineare Abbildung von $L^1(\mathbb{R})$ in $\mathcal{L}(G)$. Beispielsweise erhält man für die durch $h(t) := e^{-\varepsilon|t|}e^{i\alpha t}$ $(\varepsilon > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ definierte Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$:

$$T(h)x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|t|}e^{i\alpha t}T(t)x\,dt =$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\varepsilon - i\alpha)t}T(t)x\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\varepsilon + i\alpha)t}T(-t)x\,dt =$$
$$= R(\varepsilon - i\alpha, A)x + R(\varepsilon + i\alpha, -A)x = R(\varepsilon - i\alpha, A) - R(-\varepsilon - i\alpha, A).$$

Insgesamt also $T(h) = R(\varepsilon - i\alpha, A) - R(-\varepsilon - i\alpha, A)$.

Diese Beziehung wird im Beweis des folgenden Satzes verwendet. Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird mit $\hat{f}$ bezeichnet. Sie ist durch $\hat{f}(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}\,dt$ gegeben. Ist neben f auch $\hat{f}$ integrierbar, dann besagt der Fouriersche Umkehrsatz [2, II.1] $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha t}\,d\alpha$.

1.25 PROPOSITION Ist $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine beschränkte stark stetige Gruppe auf dem Banachraum $G \neq \{0\}$, A der Generator und $\sigma(A)$ das Spektrum, dann gilt:

(a) $\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$

(b) $\sigma(A)$ ist nichtleer.

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\sigma(A)$ ist ein beschränkte Menge.

(ii) A ist ein beschränkter Operator.

Beweis: (a) wurde bereits bewiesen.

(b) Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, dann folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini, des Fourierschen Umkehrsatzes und der obigen Überlegung:

$$\int f(t)\, e^{-\varepsilon|t|} T(t)x\, dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\alpha) \int e^{i\alpha t} e^{-\varepsilon|t|} T(t)x\, dt\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\alpha)(R(\varepsilon - i\alpha, A)x - R(-\varepsilon - i\alpha, A)x)\, d\alpha.$$ Man erhält:

$$(*) \qquad T(f)x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)(R(\varepsilon - i\alpha, A)x - R(-\varepsilon - i\alpha, A)x)\, d\alpha.$$

Die Annahme $\sigma(A) = \emptyset$ impliziert nun $T(f) = 0$ für $f \in L^1(\mathbb{R})$. Falls $\hat{f}$ kompakten Träger hat, folgt dies unmittelbar aus der Formel $(*)$. Da aber die Menge $\{f \in L^1(\mathbb{R}) : f$ hat kompakten Träger$\}$ in $L^1(\mathbb{R})$ dicht liegt [2, II.3.1] und $f \longmapsto T(f)$ stetig ist, gilt $T(f) = 0$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$. Betrachtet man die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$, dann folgt $0 = T(f) = R(1,A) - R(-1,A)$ oder $R(1,A) = R(-1,A)$, was nur im Fall $G = \{0\}$ richtig sein kann.

(c) Es ist nur die Implikation "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" zu beweisen. Falls $\sigma(A)$ beschränkt ist, gibt es einen Kreis K der $\sigma(A)$ umschließt. $P := \frac{1}{2\pi i} \int_K R(z,A)\, dz$ ist eine Projektion, die die Gruppe $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ reduziert. $T(t)|_{\ker P}$ ist eine beschränkte Gruppe mit leerem Spektrum. Aus (b) folgt $\ker P = 0$ oder $P = Id$. Damit gilt für $x \in D(A)$:

$$Ax = \frac{1}{2\pi i} \int_K R(z,A)Ax\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_K (zR(z,A)x - x)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K zR(z,A)x\, dz.$$ Dies zeigt, daß A ein beschränkter Operator ist.

Banachverbände und positive Operatoren

In dieser Arbeit wird unter einem Banachverband E stets ein komplexer Banachverband im Sinne von [S, II. § 11] verstanden. Ist $x \in E$, so besitzt x eine eindeutige Darstellung $x = x_1 + i x_2$, wobei x_1, x_2 in dem zugrundeliegenden reellen Banachverband $E_{\mathbb{R}}$ enthalten sind. Das Element $x_1 - i x_2$ heißt der zu x konjugierte Vektor, es wird mit $\bar{x}$ bezeichnet. Zunächst wollen wir uns der Definition bzw. der Konstruktion des "Signumsoperators" in einem abstrakten Banachverband zuwenden.

Ist E ein Verband von Funktionen und $f \in E$, so wird man unter $\operatorname{sign} f$, die durch

$$(\operatorname{sign} f)(s) := \frac{f(s)}{|f(s)|}$$

definierte Funktion verstehen. Dabei sei $\frac{f(s)}{|f(s)|} := 0$, falls $f(s) = 0$. In vielen Fällen (z.B. $E = L^p(\mu)$, wobei (X, Σ, μ) endlicher Maßraum,) ist dann $\operatorname{sign} f$ ein Element von E. Ist E ein abstrakter Banachverband, das heißt nicht als Verband von Funktionen gegeben, kann man die Darstellungstheorie für Banachverbände [S, III. § 5] verwenden um $\operatorname{sign} x$ $(x \in E)$ zu definieren. Wie man sich leicht überlegen kann, werden bei dieser Konstruktion die Elemente $\operatorname{sign} x \in E$ von der gewählten Darstellung abhängig. Dieser unerwünschte Effekt tritt nicht auf, wenn man Ausdrücke der Form $\operatorname{sign} x.y$ erklären will. Das heißt,

bezüglich jeder Darstellung $\hat{E}$ von E als Verband von Funktionen, stimmt die $\operatorname{sign} x.y$ entsprechende Funktion $(\operatorname{sign} x.y)^{\wedge}$ in $\hat{E}$ mit $\operatorname{sign} \hat{x}.\hat{y}$ überein.
Wir wollen drei verschiedene Konstruktionen von $\operatorname{sign} x.y$ angeben. Sie liefern jeweils das gleiche Ergebnis, jedoch unter verschiedenen Voraussetzungen an x, y bzw. E.
Die erste etwas umständliche und nur in speziellen Fällen gültige Konstruktion zeigt deutlich, daß $\operatorname{sign} x.y$ die von Funktionenverbänden bekannte Deutung besitzt. Der zweiten und dritten sieht man dies nicht ohne weiteres an. Sie sind jedoch unter allgemeineren Voraussetzungen durchführbar.

Es sei E ein Banchverband, $x, y \in E$ und es gelte $y \in E_{|x|}$. Weiter sei $u \in E_+$ so gewählt, daß $x, y \in E_u$. E_u ist nach einem Satz von Kakutani [S, II.7.4] zu einem Raum $C(K)$ isomorph. Den Elementen $x, y \in E$ entsprechen dann stetige Funktionen $\hat{x}, \hat{y}$ auf K. Setzt man $f_u(s) := \frac{\hat{x}(s)}{|\hat{x}(s)|}\hat{y}(s)$ ($f_u(s) = 0$, falls $\hat{x}(s) = 0$), dann folgt aus der Voraussetzung "$y \in E_{|x|}$", daß f_u stetig ist, also $f_u \in C(K) \cong E_u$. Das f_u entsprechende Element in E_u bzw. in E wird mit $\operatorname{sign} x.y$ bezeichnet, das heißt:

1.26 $\quad (\operatorname{sign} x.y)^{\wedge} := \operatorname{sign} \hat{x}.\hat{y} \qquad (y \in E_{|x|})$

Daß diese Definition unabhängig von der Wahl von $u \in E_+$ ist, zeigt folgende Überlegung: Es sei $v \in E_+$, so daß $x, y \in E_v$. Dabei können wir o.B.d.A. "$u \leq v$" annehmen.

E_v ist zu einem Raum $C(L)$ isomorph, und den Elementen $x, y \in E$ entsprechen stetige Funktionen $\tilde{x}, \tilde{y}$ auf L. Die kanonische Inklusion $i : E_u \longrightarrow E_v$ induziert einen Verbandshomomorphismus $\Phi : C(K) \longrightarrow C(L)$. Nach [S, III. Excer.25] ist Φ von der Gestalt $\Phi(f)(t) = h(t)f(\varphi(t))$ $(f \in C(K), t \in L)$, wobei $h \in C(L)$, $h \geq 0$ und φ eine Funktion von L in K ist, die auf der Menge $\{t \in L : h(t) > 0\}$ stetig ist. Für die durch $f_u(s) := \frac{\hat{x}(s)}{|\hat{x}(s)|}\hat{y}(s)$ $(s \in K)$ und $f_v(t) := \frac{\tilde{x}(t)}{|\tilde{x}(t)|}\tilde{y}(t)$ $(t \in L)$ definierten Funktionen $f_u \in C(K)$ und $f_v \in C(L)$ gilt dann: $\Phi(f_u)(t) = h(t)\frac{\hat{x}(\varphi(t))}{|\hat{x}(\varphi(t))|}\hat{y}(\varphi(t)) =$

$= \frac{h(t)\hat{x}(\varphi(t))}{|h(t)\hat{x}(\varphi(t))|}h(t)\hat{y}(\varphi(t)) = \frac{\tilde{x}(t)}{|\tilde{x}(t)|}\tilde{y}(t) = f_v(t)$

Dies zeigt $\Phi(f_u) = f_v$, und damit ist der Beweis der Wohldefiniertheitheit von 1.26. erbracht.

Nun sei E ein Banachverband, $x, y \in E$ und es gelte $y \in \overline{E_{|x|}}$. Stellt man $E_{|x|}$ als Raum $C(K)$ dar, dann entspricht dem Element $x \in E$ eine unimodulare Funktion $\hat{x} \in C(K)$, das heißt $|\hat{x}| = e$. Durch die Multiplikation mit $\hat{x}$ wird eine lineare Abbildung $M_{\hat{x}}$ auf $C(K)$ definiert:
$M_{\hat{x}} : C(K) \longrightarrow C(K)$, $f \longmapsto \hat{x} \cdot f$.
Es gilt $|M_{\hat{x}}f| = |f|$ und somit ist $M_{\hat{x}}$ für jede Verbandsnorm stetig, speziell für die von E induzierte Norm. Die $M_{\hat{x}}$ entsprechende Abbildung auf $E_{|x|}$, bzw. deren stetige Fortsetzung auf $\overline{E_{|x|}}$ soll mit M_x bezeichnet werden. Man definiert nun:

1.26' $\operatorname{sign} x.y := M_x(y)$ $\quad (y \in \overline{E_{|x|}})$

In der folgenden, dritten Konstruktion wird $x, y \in E$ keinen Einschränkungen unterworfen, jedoch soll E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm sein. Bezeichnet man die Bandprojektion von E auf $\overline{E_{|x|}}$ mit P_x, dann erfüllen $x, P_x y$ die Voraussetzungen der zweiten Konstruktion. Man definiert nun:

1.26" $\operatorname{sign} x.y := \operatorname{sign} x.P_x y$ (E hat o-stetige Norm)

Dabei ist der rechtsstehende Ausdruck wie in 1.26' zu interpretieren.

Bevor wir einige einfache Eigenschaften der Signumsoperation angeben, sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die drei angegebenen Definitionen von " $\operatorname{sign} x.y$ " miteinander verträglich sind. Das heißt, wenn x, y bzw. E je zwei der benötigten Voraussetzungen erfüllen, dann liefern die entsprechenden Konstruktionen dasselbe Element $\operatorname{sign} x.y \in E$. Schließlich sei daraufhingewiesen, daß man $\operatorname{sign} x.y$ auch unter allgemeineren Voraussetzungen, etwa "E ist σ-ordnungsvollständig, $x, y \in E$ beliebig" erklären kann [43].

Die anschauliche Bedeutung der im folgenden definierten Vektoren $x^{(n)}$ wird aus der ersten Konstruktion klar.

1.27 DEFINITION Es sei E ein Banachverband, $x \in E$, $\bar{x}$ der zu x konjugierte Vektor. Für $n \in \mathbb{Z}$ wird $x^{(n)}$ rekursiv wie folgt definiert:

$x^{(o)} := |x|$;

$x^{(n+1)} := \operatorname{sign} x.x^{(n)}$, falls $n \geq 0$;

$x^{(n-1)} := \operatorname{sign} \bar{x}.x^{(n)}$, falls $n \leq 0$.

Wir wollen ein paar einfache Eigenschaften der eben eingeführten Begriffe auflisten. Bei jeder Aussage sei vorausgesetzt, das die auftretenden Ausdrücke definiert sind.

1.28 (a) $\operatorname{sign} x.(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \operatorname{sign} x.y_1 + \lambda_2 \operatorname{sign} x.y_2$,
dabei sei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $x, y_1, y_2 \in E$;

(b) $\operatorname{sign}(\lambda x).y = \frac{\lambda}{|\lambda|} \operatorname{sign} x.y \quad (\lambda \neq 0)$;

(c) $|\operatorname{sign} x.y| \leq |y|$, dabei gilt Gleichheit,
falls $y \in \overline{E_{|x|}}$.

(d) Ist $|x|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+ , dann ist $M_x : E \longrightarrow E$, $y \longmapsto \operatorname{sign} x.y$ eine lineare Bijektion. Es gilt $M_x^{-1} = M_{\bar{x}}$ und $|M_x y| = |y|$ für alle $y \in E$.

(e) Hat E ordnungsstetige Norm, dann ist die Abbildung $M_x : E \longrightarrow E$, $y \longmapsto \operatorname{sign} x.y$ für jedes $x \in E$ linear und kontraktiv. Es gilt $|M_x y| \leq |y|$ $(y \in E)$, und $M_x M_{\bar{x}} = M_{\bar{x}} M_x$ ist die Bandprojektion auf $\overline{E_{|x|}}$.

(f) $x^{(o)} = |x|$, $x^{(1)} = x$, $x^{(-1)} = \bar{x}$ und falls $n \in \mathbb{Z}$:
$x^{(n+1)} = \operatorname{sign} x.x^{(n)}$, $x^{(n-1)} = \operatorname{sign} \bar{x}.x^{(n)}$

(g) $(\alpha x)^{(n)} = (\frac{\alpha}{|\alpha|})^n x^{(n)} \quad (n \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq 0)$.

Nun wollen wir auf einen interessanten Zusammenhang zwischen Verbandshomomorphismen und der Signumsoperation hinweisen. Ist $T : E \longrightarrow E$ ein Verbandshomomorphismus auf E, $x, y \in E$ und $\operatorname{sign} x.y$ definiert, dann ist auch $\operatorname{sign} Tx.Ty$ definiert, und es gilt:

1.29 $T(\operatorname{sign} x.y) = \operatorname{sign} Tx.Ty$ (T Verbandshomomorphismus)

Sind speziell x, y Eigenvektoren von T zu den Eigenwerten α bzw. $\beta \in \mathbb{C}$ und ist $\operatorname{sign} x.y$ definiert, dann folgt aus 1.29 und 1.28(g) $T(\operatorname{sign} x.y) = \beta \frac{\alpha}{|\alpha|} \operatorname{sign} x.y$, das heißt, $\operatorname{sign} x.y$ ist ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $\beta \cdot \frac{\alpha}{|\alpha|}$, sofern $\operatorname{sign} x.y \neq 0$.
In Verbindung mit Definition 1.27 folgt aus 1.29:

1.30 $T(x^{(n)}) = (Tx)^{(n)}$ $(n \in \mathbb{Z}$, T Verbandshomom.)

Zum Abschluß dieses Abschnittes beweisen wir einen Satz, der in der Spektraltheorie positiver Operatoren von grundlegender Bedeutung ist. Er ist in etwas anderer Form in [S, V. §§ 4,5] zu finden. Wir benötigen einen Hilfssatz.

1.31 LEMMA Es seien K, L kompakte Räume, $T : C(K) \longrightarrow C(L)$ ein linearer Operator mit $Te_K = e_L$. Dann sind die Aussagen "$T \geqslant 0$" und "$\|T\| \leq 1$" äquivalent.

Beweis: Da für positive Operatoren T auf $C(K)$ stets $\|T\| = \|Te_K\|$ gilt, folgt die eine Implikation aus der Voraussetzung $Te_K = e_L$.

Der Beweis der anderen Implikation beruht auf folgender Beobachtung: Für (komplexwertige) Funktionen h sind die beiden Aussagen "$-e \leq h \leq e$" und "für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $\|h - ire\| \leq \varrho_r := (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}$" äquivalent. Diese Tatsache wird im Beweis zweimal verwendet. Es sei $f \in C(K)_+$ und o.B.d.A. $0 \leq f \leq 2e_K$. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit $-e_K \leq f - e_K \leq e_K$, also gilt für alle $r \in \mathbb{R}$ $\|f - e_K - ire_K\| \leq \varrho_r$. Aus $\|T\| \leq 1$ und $Te_K = e_L$ folgt dann $\|Tf - e_L - ire_L\| \leq \varrho_r$ für alle $r \in \mathbb{R}$, was wiederum mit $-e_L \leq Tf - e_L \leq e_L$ oder $0 \leq Tf \leq 2e_L$ gleichwertig ist.

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz. Seine Bedeutung für die Spektraltheorie liegt darin, daß man mit seiner Hilfe auf die Identität der Spektren der Operatoren S und T schließen kann.

1.32 PROPOSITION Es seien E ein Banachverband, $u \in E$, $|u|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+ , $S, T \in \mathcal{L}(E)$. Es gelte $Su = u$, $T|u| = |u|$ und $|Sx| \leq T|x|$ für alle $x \in E$. Dann ist $T = M_u^{-1} S M_u$.

Beweis: Setzt man $R := M_u^{-1} S M_u$, dann gilt für alle $x \in E$

$$(*) \quad |Rx| = |M_u^{-1} S M_u x| = |S M_u x| \leq T|M_u x| = T|x| \ .$$

Wegen $T|u| = |u|$ und $T \geq 0$ gilt $T(E_{|u|}) \subseteq E_{|u|}$ und aus $(*)$ folgt $R(E_{|u|}) \subseteq E_{|u|}$. Bezeichnet man die von T bzw. R auf $E_{|u|} \cong C(K)$ induzierten Operatoren mit T_o bzw. R_o, so gilt $\|T_o\| \leq 1$ und wegen $(*)$ auch $\|R_o\| \leq 1$. Da $R_o e = M_u^{-1} S M_{|u|} = M_u^{-1} S u = M_u^{-1} u = |u| = e$, folgt aus dem Lemma $R_o \geq 0$. Die Ungleichung $(*)$ impliziert nun $R_o \leq T_o$ und man erhält $\|T_o - R_o\| = \|(T_o - R_o)e\| = 0$. Da $E_{|u|}$ in E dicht liegt, folgt $T = R = M_u^{-1} S M_u$.

1.33 KOROLLAR E sei ein Banachverband, $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $|\alpha| = 1$.
Ist $Tx = \alpha x$ und $T|x| = |x|$, dann gilt
$T(x^{(n)}) = \alpha^n x^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Die Voraussetzungen implizieren, daß T das Ideal $\overline{E_{|x|}}$ invariant läßt. Bezeichnet man den von T auf $\overline{E_{|x|}}$ induzierten Operator mit T_1 und setzt $S_1 := \alpha^{-1} T_1$, dann erfüllen $\overline{E_{|x|}}$, T_1, S_1, x die Voraussetzungen der Proposition. Somit gilt $T_1 = M_x^{-1} S_1 M_x = \alpha^{-1} M_x^{-1} T_1 M_x$. Iteriert man diese Gleichung, so folgt $T_1 = \alpha^{-n} M_x^{-n} T_1 M_x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ und wird $|x|$ eingesetzt, erhält man $\alpha^n M_x^n |x| = T_1 M_x^n |x|$ $(n \in \mathbb{Z})$. Aus $x^{(n)} = M_x^n |x|$ folgt dann die Behauptung.

2. DAS RANDSPEKTRUM POSITIVER HALBGRUPPEN

In den sechziger Jahren wurden die inzwischen klassischen Resultate von O.Perron und G.Frobenius über die Zyklizität des peripheren Spektrums positiver Matrizen auf positive Operatoren auf Banachverbänden übertragen. Diese nichttrivialen Verallgemeinerungen stammen in erster Linie von H.P.Lotz , F.Niiro , I.Sawashima und H.H.Schaefer (vgl. [S , V . §§ 4,5] und die dort angegebenen Quellenhinweise) . In diesem Kapitel werden analoge Aussagen über das Spektrum stark stetiger Halbgruppen positiver Operatoren bewiesen. Anstelle des peripheren Spektrums tritt dabei das Randspektrum der Halbgruppe, und der Begriff " zyklisch " bezieht sich auf die additive Verknüpfung der Imaginärteile der Spektralwerte. Im Anschluß an die exakte Definition (2.6) wird erläutert, wie man auf diesen Zyklizitätsbegriff kommt.

Vorher wird gezeigt, daß für positive Halbgruppen die Integraldarstellung (1.14) der Resolvente in der unter Umständen größeren Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > s(A)\}$ gültig ist (2.1) . Eine einfache Folgerung daraus ist die für alles weitere fundamentale Ungleichung (2.2(a)):

$$|R(\lambda, A)x| \leq R(\operatorname{Re}\lambda, A)|x| \qquad (\operatorname{Re}\lambda > s(A) , x \in E)$$

Tatsächlich spielt in den Beweisen aller wichtigen

Resultate dieses Abschnittes die Halbgruppe überhaupt keine Rolle. So gelten die Sätze (2.2(b) , 2.5 , 2.11 und 2.12) für das Spektrum aller unbeschränkten Operatoren, deren Resolvente die oben angegebene Ungleichung erfüllt. Man könnte noch einen Schritt weitergehen und Pseudoresolventen betrachten, die die obige Ungleichung erfüllen (vgl. 2.5').

Die folgenden Bemerkungen gelten den eben erwähnten wichtigen Resultaten dieses Abschnittes.
Bei Prop.2.5 handelt es sich um das halbgruppentheoretische Analogon von 1.32 und 1.33 aus Kapitel 1 . Allein aus dieser Tatsache kann man die Bedeutung dieses Satzes für die Spektraltheorie positiver Halbgruppen erkennen.

Im ersten Hauptsatz (2.11) wird gezeigt, daß das Randspektrum positiver Halbgruppen unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen, nämlich gewissen Wachstumsbedingungen an die Resolvente, zyklisch ist. Dabei handelt es sich, was Voraussetzung und Aussage betrifft, um das vollkommene Analogon eines Satzes von H.P.Lotz [S , V.4.9] . Ein Spezialfall von (2.11) wurde von R.Derndinger bewiesen [3 , 4.11] . Die Frage, ob das Randspektrum beliebiger positiver Halbgruppen zyklisch ist, bleibt ebenso wie die entsprechende Frage für positive Operatoren offen .

Beim zweiten Hauptsatz (2.12) handelt es sich um das Analogon eines Satzes von F.Niiro und I.Sawashima [S , V. 5.4 und 5.5] . Es wird bewiesen, daß jeder Punkt des Rand-

spektrums ein Pol der Resolvente ist, sofern die Spektralschranke ein Pol mit endlichdimensionalem Residuum ist. Mit Hilfe dieses Satzes kann man die beschränkten, positiven, irreduziblen Gruppen genau beschreiben, deren Spektralschranke ein Pol der Resolvente ist (2.14). Dieses Resultat hat H.Uhlig unter etwas stärkeren Voraussetzungen bewiesen [42, III.2.5].

In diesem und den folgenden Kapiteln werden ausschließlich stark stetige Halbgruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden betrachtet. Wir nennen diese Objekte im weiteren kurz positive Halbgruppen. Von den in Kapitel 1 angegebenen Beispielen, sind die Translationshalbgruppe (1.20) und die in (1.21) definierte Rotationshalbgruppe auf Γ positiv. Multiplikationshalbgruppen (1.19) sind dann und nur dann positiv, wenn der Multiplikator reell ist.

Will man Aussagen über diejenigen Spektralwerte machen, deren Realteile mit der Spektralschranke $s(A)$ zusammenfallen, dann ist es von Vorteil, die Resolvente in der Nähe dieser Punkte zu kennen. Dies ist erfüllt, falls $s(A) = \omega_o$, dann hat man die Integraldarstellung (1.14) zur Verfügung. Wie der folgende Satz zeigt, gilt diese Darstellung der Resolvente für positive Halbgruppen auch ohne die Voraussetzung " $s(A) = \omega_o$ ". In etwas allgemeinerer Form ist er in [12] bewiesen.

2.1 PROPOSITION Es sei E ein Banachverband, $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf E und $s(A)$ die Spektralschranke der Halbgruppe.

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}\,\lambda > s(A)$, dann existiert $\lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ für jedes $x \in E$ und es gilt:

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds := \lim_{r\to 0} \int_0^r e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$$

Beweis: Ist $\lambda_0 > \omega_0$, dann gilt nach (1.14')

$R(\lambda_0, A)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ $(n \geq 0,\ x \in E)$.

Ist nun $\mu \in \mathbb{R}$, $s(A) < \mu \leq \lambda_0$, so gilt für $x \in E_+$, $x' \in E'_+$:

$$\langle R(\mu, A)x, x' \rangle = \sum_0^\infty (\lambda_0 - \mu)^n \langle R(\lambda_0, A)^{n+1}x, x' \rangle =$$

$$= \sum_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{n!} ((\lambda_0 - \mu)s)^n e^{-\lambda_0 s} \langle T(s)x, x' \rangle\,ds =$$

$$= \int_0^\infty \sum_0^\infty \frac{1}{n!} ((\lambda_0 - \mu)s)^n e^{-\lambda_0 s} \langle T(s)x, x' \rangle\,ds =$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda_0 - \mu)s} e^{-\lambda_0 s} \langle T(s)x, x' \rangle\,ds = \int_0^\infty e^{-\mu s} \langle T(s)x, x' \rangle\,ds =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left\langle \int_0^r e^{-\mu s} T(s)x\,ds, x' \right\rangle$$

Dabei ist das Vertauschen von "$\sum$" und "$\int$" erlaubt, weil die Integranden positiv sind. Somit konvergiert das monoton wachsende Netz $\left(\int_0^r e^{-\mu s} T(s)x\,ds \right)_{r\geq 0}$ schwach gegen $R(\mu, A)x$ und wegen [S, II.5.9] auch in der Norm. Da der positive Kegel erzeugend ist, gilt schließlich für beliebiges $x \in E$: $R(\mu, A)x = \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\mu s} T(s)x\,ds$.

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu > s(A)$, dann gilt:

$\left| \int_r^t e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \right| \leq \int_r^t e^{-\mu s} T(s)|x|\,ds$ $(0 \leq r \leq t < \infty,\ x \in E)$,

und damit existiert $Rx := \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ $(x \in E)$.

Betrachten wir nun die Gleichung (1.13) :

$$\int_0^r e^{-\sigma s} T(s)(\sigma - A)x\,ds = x - e^{-\sigma r} T(r)x \quad (r \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{C}, x \in D(A))$$

dann folgt aus dem bereits Bewiesenen für $\mu > s(A)$:

$\lim_{r\to\infty} e^{-\mu r} T(r)x = 0 \quad (x \in D(A))$.

Wegen $|e^{-\lambda r} T(r)x| = e^{-\mu r}|T(r)x|$, konvergiert auch $(e^{-\lambda r} T(r)x)_{r\geq 0}$ gegen 0, falls $x \in D(A)$. Setzt man nun in (1.13) $\sigma = \lambda$, dann folgt $R\cdot(\lambda - A)x = x \quad (x \in D(A))$, das heißt $R = R(\lambda, A)$.

Wir wollen nun zwei einfache, aber wichtige Folgerungen des eben bewiesenen Satzes notieren. Wie schon eingangs erwähnt, ist die in Teil (a) des folgenden Satzes angegebene Ungleichung grundlegend für alles weitere. Aussage (b) wurde erstmals von R. Derndinger bewiesen [3, 4.6]. Im hier angegebenen Beweis wird lediglich die Ungleichung von Teil (a) verwendet.

2.2 KOROLLAR Es sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E, A der Generator, $s(A)$ die Spektralschranke.

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > s(A)$, dann gilt $|R(\lambda, A)x| \leq R(\mathrm{Re}\,\lambda, A)|x|$ für alle $x \in E$.

(b) Ist das Spektrum nicht leer, dann liegt die Spektralschranke im Spektrum.

Beweis: (a) folgt unmittelbar aus der Darstellung
$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > s(A),\ x \in E)$.

(b) Bekanntlich gilt für konvergente Folgen $(\lambda_n) \subseteq \varrho(A)$
$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \in \varrho(A) \iff \{R(\lambda_n, A) : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt in $\mathcal{L}(E)$.
Ist nun $s(A) > -\infty$ und nimmt man an, daß $s(A) \in \varrho(A)$,
dann folgt aus (a): $\|R(\lambda, A)\| \leq \|R(\mathrm{Re}\,\lambda, A)\| \leq \|R(s(A), A)\| =: \varepsilon^{-1}$
Das heißt $\{R(\lambda, A) : \mathrm{Re}\,\lambda > s(A)\}$ ist gleichmäßig beschränkt und somit ist $L := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda = s(A)\} \subseteq \varrho(A)$.
Aus Stetigkeitsgründen folgt $\|R(\lambda, A)\| \leq \varepsilon^{-1}$ für $\lambda \in L$
und somit gilt $\{\lambda \in \mathbb{C} : s(A) - \varepsilon < \mathrm{Re}\,\lambda < s(A) + \varepsilon\} \subseteq \varrho(A)$.
Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $s(A)$.

Wie wir in 1.25 sahen ist das Spektrum beschränkter Gruppen stets nichtleer. Daß man dabei im allgemeinen auf die Beschränktheit nicht verzichten kann, zeigt das in [HP, 23.16] angegebene Beispiel. Für positive Gruppen, das heißt stark stetige Gruppen positiver Operatoren, gilt jedoch (vgl. auch [12]):

2.3 KOROLLAR Das Spektrum positiver Gruppen ist nichtleer.

Beweis: Aus der Ungleichung 2.2(a) folgt $R(\mu, A) \geq 0$ falls $\mu > s(A)$. Wäre $\sigma(A) = \emptyset$, dann gilt $s(A) = s(-A) = -\infty$ und es folgt $R(\mu, A) \geq 0$ und $R(\mu, -A) \geq 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Aus $R(\mu, A) = -R(-\mu, -A)$ ergibt sich

$R(\mu, A) = 0$ $(\mu \in \mathbb{R})$, was nur im Fall $E = \{0\}$ richtig sein kann.

Aus Satz 2.1 kann man folgern, daß für positive Halbgruppen die Spektralschranke und die Abszisse der starken Konvergenz zusammenfallen (vgl. [12]), das heißt:

$$s(A) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} : \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\lambda s} T(s)x\,ds \text{ existiert für alle } x \in E \text{ und alle } \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda > \mu\}.$$

Andererseits ist ω_0 stets die Abszisse der absoluten Konvergenz (vgl. die Ausführungen nach 1.12). Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $s(A) < \operatorname{Re}\lambda < \omega_0$, dann gilt also:

$\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds$ existiert für alle $x \in E$ als uneigentliches Riemann-Integral. Jedoch ist der Integrand nicht für jedes $x \in E$ Bochner-integrierbar.

Daß dies tatsächlich vorkommt, das heißt, daß auch für positive Halbgruppen $s(A) < \omega_0$ gelten kann, hat M. Wolff gezeigt. In [12] ist eine stark stetige Halbgruppe von Verbandshomomorphismen mit $s(A) = -\infty$ und $\omega_0 = 0$ angegeben. Im folgenden sind Bedingungen an die Halbgruppe bzw. an den Banachverband angegeben, unter denen $s(A) = \omega_0$ gilt.

2.4 Es sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E. Jede der folgenden Bedingungen impliziert $s(A) = \omega_0$.

(a) E ist ein Raum C(K) (oder allgemeiner: Es gibt ein $t \geq 0$ und ein $u \in E_+$, so daß $T(t)E \subseteq E_u$).

(b) E ist ein Raum $L^1(\mu)$ (oder allgemeiner: Es gibt ein $t \geq 0$, so daß $T(t)$ Kegel-absolutsummierend ist).

(c) E ist ein Raum $L^p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$ und es gibt strikt positive Funktionen $u \in L^p(\mu)$, $v \in L^q(\mu)$, so daß für ein $t > 0$ $T(t)u = u$ und $T(t)'v = v$.

(d) Der Spektralradius eines Operators $T(t)$ ist Eigenwert von $T(t)$ oder von $T(t)'$.

(e) Die Halbgruppe ist differenzierbar.

Genaueres zu (a), (b) und (d) findet man in [27], (e) ist in [29] bewiesen. Mit Hilfe des Rieszschen Konvexitätssatzes [S, V.8.2] kann man zeigen, daß im Falle (c) $s(A) = \omega_0 = 0$ gilt.

Bei dem folgenden Satz handelt es sich um das Analogon von 1.32 und 1.33. Zur Definition der Vektoren $u^{(k)}$ sei auf 1.27 verwiesen.

2.5 PROPOSITION $\{T(t)\}$ sei eine positive Halbgruppe mit $s(A) = 0$ und für ein $u \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $Au = i\alpha u$ und $A|u| = 0$. Dann folgt:
(a) $Au^{(k)} = ik\alpha u^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Ist $|u|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+, so gilt

$$M_u(D(A)) \subseteq D(A) \quad \text{und} \quad A = M_{\bar{u}}(A + i\alpha) M_u .$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen und 2.2(a) folgt:

$\mu R(\mu + i\alpha, A)u = u \qquad (\mu > 0)$

$\mu R(\mu, A)|u| = |u| \qquad (\mu > 0)$

$|R(\mu + i\alpha, A)x| \leq R(\mu, A)|x| \qquad (\mu > 0 \ , \ x \in E)$

Damit ist $E_o := \overline{E_{|u|}}$ unter den Operatoren $\mu R(\mu, A)$ und $\mu R(\mu + i\alpha, A)$ invariant. Die Einschränkungen $\mu R_o(\mu, A)$ und $\mu R_o(\mu + i\alpha, A)$ erfüllen die Voraussetzungen von 1.32, also gilt $\mu R_o(\mu, A) = M_{\bar{u}} \mu R_o(\mu + i\alpha, A) M_u$. Dabei ist der Operator M_u von $\mu > 0$ unabhängig!
Da die holomorphen Funktionen $\lambda \longmapsto \lambda R_o(\lambda, A)$ und $\lambda \longrightarrow M_{\bar{u}} \lambda R_o(\lambda + i\alpha, A) M_u$ auf den positiven reellen Zahlen übereinstimmen, folgt aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie: $\lambda R_o(\lambda, A) = M_{\bar{u}} \lambda R_o(\lambda + i\alpha, A) M_u$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\lambda > 0$.
Iteriert man diese Gleichung, dann folgt

$$\lambda R_o(\lambda, A) = M_{\bar{u}}^k \lambda R_o(\lambda + ik\alpha, A) M_u^k \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\lambda > 0.$$

Setzt man in diese Gleichung $|u|$ ein und berücksichtigt, daß $M_u^k |u| = u^{(k)}$ $(k \in \mathbb{Z})$, dann folgt

$$- \lambda R(\lambda + ik\alpha, A) u^{(k)} = \lambda R_o(\lambda + ik\alpha, A) u^{(k)} = u^{(k)} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

und man erhält (a). Ist $|u|$ ein quasiinnerer Punkt, dann gilt $R(\mu, A) = R_o(\mu, A)$ und (b) ergibt sich aus

$$\mu R(\mu, A) = M_{\bar{u}} \mu R(\mu + i\alpha, A) M_u .$$

Ein Blick auf den Beweis von 2.5 zeigt, daß man die Halbgruppe an keiner Stelle benötigt hat. Im Grunde haben wir das folgende allgemeinere Resultat bewiesen:

2.5' PROPOSITION E sei ein Banachverband, $u \in E$, $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und R eine Pseudoresolvente auf E. Erfüllt R die folgenden Bedingungen: $|R(\lambda)x| \leq R(\mathrm{Re}\,\lambda)|x|$ für $x \in E$, $\lambda \in D$,

$$\lambda R(\lambda + i\alpha)u = u \quad \text{für ein (alle)} \quad \lambda \in D,$$

$$\lambda R(\lambda)|u| = |u| \quad \text{für ein (alle)} \quad \lambda \in D,$$

dann gilt: (a) $\lambda R(\lambda + ik\alpha)\, u^{(k)} = u^{(k)}$ $(k \in \mathbb{Z}, \lambda \in D)$,

(b) $\lambda R(\lambda) = M_{\overline{u}}\, \lambda R(\lambda + i\alpha)\, M_u$ $(\lambda \in D)$, falls $|u|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+ ist.

Die zentralen Sätze dieses Kapitels machen Aussagen über die "Zyklizität" des "Randspektrums". Der dabei auftretende Zyklizitätsbegriff wird im Anschluß an die Definition erläutert.

2.6 DEFINITION Es sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe, $\sigma(A)$ das Spektrum und $s(A)$ die Spektralschranke.

(a) Ist $s(A) > -\infty$, dann heißt die Menge $\sigma_+(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\,\lambda = s(A)\}$ das Randspektrum

der Halbgruppe. Es sei $\sigma_+(A) := \emptyset$, falls $s(A) = -\infty$.

(b) Das Randspektrum $\sigma_+(A)$ heißt <u>additiv zyklisch</u>, falls mit $\lambda = s(A) + i\nu$ $(\nu \in \mathbb{R})$ auch alle Punkte $s(A) + ik\nu$ $(k \in \mathbb{Z})$ im Randspektrum liegen.

Unmittelbar aus der Definition folgt $\sigma_+(A) \subseteq \overline{\varrho_+(A)}$, wobei $\varrho_+(A)$ die nach rechts unbeschränkte Zusammenhangskomponente der Resolventenmenge bezeichnet. Insbesondere ist $\sigma_+(A)$ im topologischen Rand des Spektrums enthalten, und damit ist das Randspektrum eine Teilmenge des approximativen Punktspektrums. Weiter sieht man, daß A dann und nur dann zyklisches Randspektrum besitzt, wenn $A + \mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$ ein solches hat. Aus diesem Grund kann man sich im wesentlichen auf den Fall $s(A) = 0$ beschränken, sofern das Spektrum nichtleer ist. In diesem Fall ist $\sigma_+(A) \subseteq i\mathbb{R}$ und "additiv zyklisch" ist gleichbedeutend mit: "$\sigma_+(A)$ ist die Vereinigung (additiver) Untergruppen von $i\mathbb{R}$".

Die folgende Überlegung soll zeigen, wie man auf den oben definierten Zyklizitätsbegriff kommt. Dazu sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe, A der Generator und es gelte $s(A) = 0$. Nimmt man an, daß $T(t)$ ausschließlich Punktspektrum besitzt, dann gilt nach 1.23 $\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}$. Für die Randspektren $\sigma_+(A)$ und $\sigma_0(T(t)) := \{\lambda \in \sigma(T(t)) : |\lambda| = 1\}$ folgt daraus $\sigma_0(T(t)) = e^{t\sigma_+(A)}$. Da (unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen) $\sigma_0(T(t))$ multiplikativ zyklisch ist,

und da die Abbildung $\lambda \longmapsto e^{t\lambda}$ ein Homomorphismus von der additiven Gruppe $i\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ ist, wird man erwarten, daß $\sigma_+(A)$ additiv zyklisch im Sinne von 2.5(b) ist.
Diese Überlegung ist rein heuristischer Natur. Tatsächlich ist es nicht möglich aus der multiplikativen Zyklizität von $\sigma_0(T(t))$ auf die additive Zyklizität von $\sigma_+(A)$ zu schließen, da die Exponentialfunktion $\lambda \longmapsto e^{t\lambda}$ nicht injektiv ist (ganz abgesehen davon, daß der "spektrale Abbildungssatz" $\sigma(T(t))\setminus\{0\} = e^{t\sigma(A)}$ im allgemeinen nicht gilt). Vielmehr zeigt es sich in den Beweisen, daß die Zyklizität des peripheren Spektrums der Operatoren $T(t)$ gar nicht verwendet wird. Mehr noch, selbst die Halbgruppe $\{T(t)\}$ spielt in den Beweisen keine Rolle. Entscheidend ist die in 2.2(a) bewiesene Ungleichung der Resolvente.

Der folgende Satz liefert ein erstes Beispiel für Halbgruppen mit additiv zyklischem Randspektrum. In diesem Fall ist das Randspektrum mit dem gesamten Spektrum identisch. Zur Definition und Bedeutung des Begriffes "irreduzibel" sei auf [S, III.8.1] verwiesen.

2.7 PROPOSITION Jede positive, periodische Halbgruppe hat additiv zyklisches (Rand-)Spektrum. Ist die Halbgruppe darüber hinaus irreduzibel und τ ihre Periode, dann ist das Spektrum die Menge $i\frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}$.

Beweis: Nach 1.21 gilt zunächst $\sigma(A) \subseteq i\frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}$ und jeder Spektralwert ist ein Pol der Resolvente, also ein Eigenwert des Generators. Ist $i\alpha \in \sigma(A)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, dann existiert ein $x \neq 0$, $x \in D(A)$ mit $Ax = i\alpha x$. Aus 1.23(b) folgt $T(t)x = e^{i\alpha t}x$ für alle $t \geq 0$. Da jedes $T(t)$ ein Verbandsisomorphismus ist ($T(t)^{-1} = T(n\tau - t) \geq 0$), gilt $T(t)|x| = |x|$ $(t \geq 0)$. Aus 1.23(b) folgt $A|x| = 0$, also wegen 2.5 $Ax^{(k)} = ik\alpha x^{(k)}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Damit ist der Beweis der Zyklizität erbracht.

Ist die Halbgruppe irreduzibel, dann ist jeder positive Fixpunkt ein quasiinnerer Punkt von E_+. Sind dann $i\alpha$, $i\beta \in \sigma(A)$, dann gibt es $x, y \in D(A)$ mit $Ax = i\alpha x$ und $Ay = i\beta y$. Wie oben folgt $A|x| = A|y| = 0$ und aus 2.5 erhält man: $A = M_{\bar{x}}(A + i\alpha)M_x = M_{\bar{y}}(A + i\beta)M_y$. Hieraus folgt $A = (M_x M_{\bar{y}})^{-1}(A + i(\alpha - \beta))M_x M_{\bar{y}}$. Dies zeigt, daß mit $i\alpha$ und $i\beta$ auch $i\alpha - i\beta$ im Spektrum liegt. Somit ist $\sigma(A)$ eine Untergruppe von $i\frac{2\pi}{\tau}\mathbb{Z}$, das heißt von der Form $i\frac{2\pi k}{\tau}\mathbb{Z}$ für ein $k \geq 1$. Da die Eigenvektoren total sind (vgl.1.21), folgt $T(\frac{\tau}{k}) = \mathrm{Id}$. Die Annahme "$k > 1$" steht somit im Widerspruch zur Minimalität von τ.

Auf das folgende Korollar werden wir im dritten Kapitel zurückgreifen. Der Beweis folgt aus dem obigen Satz und der in 1.21 angegebenen Beschreibung der normstetigen, periodischen Halbgruppen.

2.8 KOROLLAR. Jede normstetige, periodische, positive Halbgruppe ist trivial.
Insbesondere gibt es nur die triviale periodische, positive Halbgruppe auf endlichdimensionalen Banachverbänden.

Ebenso wie im Fall eines beschränkten, positiven Operators, kann man auch für positive Halbgruppen die Zyklizität des Randspektrums (noch?) nicht ohne Zusatzvoraussetzung beweisen. Unsere Voraussetzungen beinhalten gewisse Wachstumsbedingungen an die Resolvente.

2.9 DEFINITION Es sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E und es sei $s(A) \in \mathbb{R}$.

(a) Die Halbgruppe erfüllt die (w)-Bedingung, falls die Menge $\{(\mu - s(A))R(\mu, A) : \mu \in \mathbb{R}, \mu > s(A)\}$ in $\mathcal{L}(E)$ gleichmäßig beschränkt ist.

(b) Die Halbgruppe heißt (w)-auflösbar, falls es eine Kette $\{0\} = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_{n-1} \subseteq I_n = E$ $\{T(t)\}$-invarianter Ideale gibt, so daß für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die von $\{T(t)\}$ auf $E_k := {}^{I_k}/_{I_{k-1}}$ induzierte Halbgruppe $\{T_k(t)\}$ die (w)-Bedingung erfüllt.

Wegen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit und der in 1.16 angegebenen Formeln kann man die Wachstumsbedingung in Teil (a) wie folgt definieren:
"Die Menge $\{(\mu - s(A))R(\mu, A) : s(A) < \mu < s(A) + 1\}$ ist in $\mathcal{L}(E)$ punktweise beschränkt."
In (b) könnte man anstelle von "$\{T(t)\}$-invariante Ideale " auch "$\{R(\lambda, A)\}$ - invariante Ideale " setzen. Dabei genügt es, daß die Ideale unter einem Operator $R(\lambda, A)$ $(\mathrm{Re}\,\lambda > s(A))$ invariant sind.

Der folgende Satz behandelt einige Eigenschaften der eben eingeführten Begriffe. Es werden hinreichende, sowie äquivalente Bedingungen für die (w)-Bedingung und für (w)-Auflösbarkeit angegeben.

2.10 PROPOSITION $\{T(t)\}$ sei eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E, A der Generator und es gelte $s(A) \in \mathbb{R}$.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) Die Halbgruppe erfüllt die (w)-Bedingung (bzw. ist (w)-auflösbar).
(ii) Für ein $\lambda_0 > s(A)$ erfüllt der positive Operator $R(\lambda_0, A)$ die (G)-Bedingung (bzw. ist (G)-auflösbar) im Sinne von [S, V.4.7].

(b) Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend für die (w)-Auflösbarkeit der Halbgruppe.

(i) $s(A)$ ist ein Pol der Resolvente.

(ii) Der Generator hat kompakte Resolvente.

(c) Ist $s(A) = 0$, dann ist jede der folgenden Bedingung hinreichend für die (w)-Bedingung der Halbgruppe.

(i) Die Césaro-Mittel $\{\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,ds : t > 0\}$ sind in $\mathcal{L}(E)$ gleichmäßig (punktweise) beschränkt.

(ii) Die Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist in $\mathcal{L}(E)$ gleichmäßig (punktweise) beschränkt.

(iii) Es gilt $\omega_0 = 0$ und für ein $t_0 > 0$ erfüllt $T(t_0)$ die (G)-Bedingung im Sinne von [S, V.4.7] .

Beweis: (a) folgt aus den Gleichungen 1.5 und 1.6 .
(b) Nach 1.4(b) ist $s(A)$ genau dann ein Pol der Resolvente, wenn $(\lambda_0 - s(A))^{-1}$ ein Pol der Resolvente von $R(\lambda_0, A)$ ist. Die Behauptung (i) folgt dann unter Verwendung von (a) aus [S, V.4 Ex.4] . Bedingung (ii) impliziert (i).

(c) (i): Es sei $M := \sup\{\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,ds\| : t > 0\}$. Ist $x \in E$, $\lambda > 0$, $r > 0$, dann folgt unter Verwendung partieller Integration:

$$\lambda\int_0^r e^{-\lambda s}T(s)x\,ds = r\lambda e^{-\lambda r}\frac{1}{r}\int_0^r T(\sigma)x\,d\sigma + \lambda^2\int_0^r se^{-\lambda s}\left[\frac{1}{s}\int_0^s T(\sigma)x\,d\sigma\right]ds$$

Schätzt man die beiden Césaro-Mittel durch $M\|x\|$ ab, erhält man $\|\lambda\int_0^r e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\| \leq (r\lambda e^{-\lambda r} + \lambda^2\int_0^r se^{-\lambda s}ds)\cdot M\|x\| =$
$= (1 - e^{-\lambda r})\,M\|x\|$.

Für $r \longrightarrow \infty$ konvergiert $\lambda\int_0^r e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$ gegen

$R(\lambda, A)x$ (vgl. 2.1) und man erhält $\| R(\lambda, A)x \| \leq M\|x\|$.

Die Bedingung (ii) impliziert (i), und (iii) ergibt sich folgendermaßen:
Aus 1.15 folgt: $\mu R(\mu, A) = \mu e^{\mu t_0} R(e^{\mu t_0}, T(t_0)) \cdot \int_0^{t_0} e^{-\mu s} T(s)\, ds$, falls $\mu > 0$. Nun ist $\{e^{\mu t_0} \int_0^{t_0} e^{-\mu s} T(s)\, ds : 0 < \mu < 1\}$ stets beschränkt, und die Beschränktheit von $\{\mu R(e^{\mu t_0}, T(t_0)) : 0 < \mu < 1\}$ folgt aus der Voraussetzung (iii).

Die in Teil (b) bzw. (c) angegebenen Bedingungen sind sicher nicht notwendig. So folgt beispielsweise aus (c)(ii) und (iii), daß die Spektralschranke und die Abszisse der absoluten Konvergenz der Halbgruppe zusammenfallen. Dies ist keineswegs notwendig, es gibt Halbgruppen mit $s(A) < \omega_0$, die die (w)-Bedingung erfüllen.

Nun wollen wir den ersten Hauptsatz beweisen. Dabei handelt es sich um das Analogon eines Satzes von H. P. Lotz [S, V.4.9]. Einen Spezialfall hat R. Derndinger [3] bewiesen.

2.11 THEOREM Jede positive, (w)-auflösbare Halbgruppe hat additiv zyklisches Randspektrum.

Beweis: Ist das Randspektrum leer, dann ist nichts zu beweisen. Wir können demnach o.B.d.A annehmen, daß $s(A) = 0$, das heißt $\sigma_+(A) \subseteq i\mathbb{R}$.

Nach Voraussetzung gibt es eine $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda \in \varrho(A)}$-invariante Idealkette $\{0\} = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n = E$, so daß die Familien $\{\mu R_r(\mu, A) : 0 < \mu < 1\}$ $(r = 1,2,..,n)$ gleichstetig sind. Dabei ist $R_r(\lambda, A)$ der von $R(\lambda, A)$ auf $E_r := {}^{I_r}/_{I_{r-1}}$ induzierte Operator. Ist nun $i\alpha \in \sigma_+(A)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, dann existiert nach 1.4(a) und 1.10(b) ein r, so daß $(\lambda - i\alpha)^{-1} \in \sigma(R_r(\lambda, A))$ $(\mathrm{Re}\ 0)$. Können wir daraus folgern, daß $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(R_r(\lambda, A))$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, dann folgt wiederum mit 1.4(a) und 1.10(b) $ik\alpha \in \sigma_+(A)$ $(k \in \mathbb{Z})$, und damit wäre der Beweis der Zyklizität von $\sigma_+(A)$ erbracht.

Zur Abkürzung setzen wir nun $F := E_r$, $R(\lambda) := R_r(\lambda, A)$, $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$. Dann ist $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ eine Pseudoresolvente auf F und $\{\mu R(\mu) : 0 < \mu < 1\}$ in $\mathcal{L}(F)$ beschränkt. Da sich die Ungleichung 2.2(a) auf Teilräume und Quotienten vererbt, gilt $|R(\lambda)x| \leq R(\mathrm{Re}\,\lambda)|x|$, falls $\lambda \in D$, $x \in F$. Weiter gilt $(\lambda - i\alpha)^{-1} \in \sigma(R(\lambda))$, sogar $(\lambda - i\alpha)^{-1} \in AP\sigma(R(\lambda))$, denn $(\lambda - i\alpha)^{-1}$ liegt im Abschluß der Resolventenmenge. Ist nun $\hat{F}$ ein $\mathcal{F}$-Produkt von F und bezeichnet man die von $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ auf $\hat{F}$ induzierte Pseudoresolvente mit $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda \in D}$, dann gilt:

(i) $|\hat{R}(\lambda)\hat{x}| \leq \hat{R}(\mathrm{Re}\,\lambda)|\hat{x}|$ $(\lambda \in D, \hat{x} \in \hat{F})$.

(ii) Es gibt ein $\hat{x}_0 \neq 0$, so daß

$$\lambda\hat{R}(\lambda + i\alpha)\hat{x}_o = \hat{x}_o \quad (\lambda \in D)$$

$$\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_o| \geq |\hat{x}_o| \qquad (\mu > 0) \ .$$

(iii) Es gibt ein $\varphi \in \hat{F}'_+$ mit $\langle |x_o|, \varphi\rangle > 0$ und $\lambda\hat{R}(\lambda)'\varphi = \varphi \quad (\lambda \in D)$.

Bedingung (i) folgt unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft von $R(\lambda)$, und da $(\lambda - i\alpha)^{-1}$ im approximativen Punktspektrum von $R(\lambda)$ liegt, gibt es für ein festes $\lambda \in D$ ein $\hat{x}_o \neq 0$ mit $\hat{R}(\lambda)\hat{x}_o = (\lambda - i\alpha)^{-1}\hat{x}_o$. Aus 1.10(a) folgt dann $(\lambda - i\alpha)\hat{R}(\lambda)\hat{x}_o = \hat{x}_o$ für alle $\lambda \in D$, was gleichbedeutend mit $\lambda\hat{R}(\lambda + i\alpha)\hat{x}_o = \hat{x}_o$ ist. Verwendet man nun (i), dann gilt für $\mu > 0$

$$|\hat{x}_o| = |\mu\hat{R}(\mu + i\alpha)\hat{x}_o| \leq \mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_o| \ .$$

Nun zur Bedingung (iii): Zunächst existiert ein $\psi \in \hat{F}'_+$ mit $\langle |\hat{x}_o|, \psi\rangle > 0$. Da $\{\mu\hat{R}(\mu)'\psi : 0 < \mu < 1\}$ beschränkt ist, und beschränkte Mengen in $\hat{F}'$ $\mathfrak{b}(\hat{F}', \hat{F})$-relativkompakt sind, existiert für einen gegen 0 konvergenten Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf dem Intervall $(0,1)$ $\varphi := \lim \mu\hat{R}(\mu)'\psi$. Nun folgt aus der Resolventengleichung und der $\mathfrak{b}(\hat{F}', \hat{F})$-Stetigkeit von $\hat{R}(\lambda)'$: $\lambda\hat{R}(\lambda)'\varphi = \lim \lambda\mu\hat{R}(\lambda)'\hat{R}(\mu)'\psi =$
$= \lim \frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda - \mu}\, \hat{R}(\mu)'\psi - \lim \frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda - \mu}\, \hat{R}(\lambda)'\psi = \varphi.$
Des weiteren gilt für alle $\mu > 0$: $0 < \langle |\hat{x}_o|, \psi\rangle \leq$
$\leq \langle \mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_o|, \psi\rangle = \langle |\hat{x}_o|, \mu\hat{R}(\mu)'\psi\rangle$, woraus $\langle |\hat{x}_o|, \varphi\rangle > 0$ folgt. Damit sind die Eigenschaften (i)-(iii) nachgewiesen.

Das Ideal $I := \{\hat{x} \in \hat{F} : \langle |\hat{x}|, \varphi\rangle = 0\}$ ist wegen (ii) und (iii) $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ -invariant. Für die von $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ auf $\tilde{F} := \hat{F}/_I$ induzierte Pseudoresolvente $\{\tilde{R}(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ gilt dann:

(i)' $|\tilde{R}(\lambda)\tilde{x}| \leq \tilde{R}(\mathrm{Re}\,\lambda)|\tilde{x}|$ $(\lambda \in D\,,\ \tilde{x} \in \tilde{F})$.

(ii)' Es gibt ein $\tilde{x}_0 \neq 0$, so daß

$$\lambda\tilde{R}(\lambda + i\alpha)\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \qquad (\lambda \in D)$$

$$\mu\tilde{R}(\mu)|\tilde{x}_0| = |\tilde{x}_0| \qquad (\mu > 0)\,.$$

(i)' ist sofort klar, und bezeichnet man das kanonische Bild von $\hat{x}_0$ in $\tilde{F}$ mit $\tilde{x}_0$, dann gilt $\lambda\tilde{R}(\lambda + i\alpha)\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$, falls $\lambda \in D$. Aus $\langle|\hat{x}_0|, \varphi\rangle > 0$ folgt $\hat{x}_0 \notin I$ oder $\tilde{x}_0 \neq 0$. Bedingung (iii) impliziert $\langle\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_0| - |\hat{x}_0|, \varphi\rangle = 0$ und wegen (ii) bedeutet dies $\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_0| - |\hat{x}_0| \in I$ oder $\mu\tilde{R}(\mu)|\tilde{x}_0| = |\tilde{x}_0|$. Damit ist (i)' und (ii)' bewiesen.

Aus Prop.2.5' folgt nun $\lambda\tilde{R}(\lambda + ik\alpha)\tilde{x}_0^{(k)} = \tilde{x}_0^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in D$. Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(\tilde{R}(\lambda))$. Um zurück auf $R(\lambda)$ zu schließen, wendet man zunächst 1.10(b) an und erhält $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(\hat{R}(\lambda))$. Aus $\sigma(R(\lambda)) = \sigma(\hat{R}(\lambda))$ folgt schließlich $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(R(\lambda))$, und dies war wie eingangs erwähnt wurde nachzuweisen.

Beim zweiten Hauptsatz handelt es sich um das Analogon eines Resultates von F. Niiro und I. Sawashima [S, V.5.5].

2.12 THEOREM Es sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E mit Spektralschranke $s(A) = 0$.

(a) Ist $s(A)$ ein Pol der Resolvente und hat das zugehörige Residuum endlichen Rang, dann ist $\sigma_+(A)$ eine

endliche Vereinigung additiver Untergruppen von $i\mathbb{R}$ und besteht ausschließlich aus Polen.

(b) Ist $s(A)$ ein Pol erster Ordnung und $\ker A$ eindimensional, dann ist $\sigma_+(A)$ eine Untergruppe und besteht aus Polen erster Ordnung der geometrischen Vielfachheit 1 .

Wir wollen zunächst ein paar Anmerkungen machen . Da 0 ein isolierter Punkt von $\sigma_+(A)$ ist, sind die in $\sigma_+(A)$ enthaltenen Untergruppen von $i\mathbb{R}$ diskret, das heißt von der Form $i\alpha\mathbb{Z}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Die Voraussetzungen von (a) sind erfüllt, falls der Generator kompakte Resolvente hat.

Ist $s(A)$ ein Pol und ist die Halbgruppe $\{T(t)\}$ irreduzibel, dann sind die Voraussetzungen von (b) erfüllt.

Hat die Resolvente eines Operators $T(t_0)$ $(t_0 > 0)$, einen Pol in 1 , dann hat die Resolvente der Halbgruppe einen Pol in 0 (vgl.1.23). Ist darüberhinaus $\ker (1 - T(t_0))$ endlichdimensional, dann sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt. Aufgrund von 1.23(b) gilt dann $\sigma_+(A) = \{0\}$.

Beweis von 2.12 : Wir werden zunächst die zweite Aussage beweisen und anschließend die erste darauf zurückführen.
(b) Nach Voraussetzung existiert $P := \lim_{\lambda \to 0} \lambda R(\lambda, A)$.
P ist eine positive Projektion vom Rang 1 , also $P = \varphi \otimes u$

für ein $\varphi \in E'_+$, $u \in E_+$. Betrachten wir ein Ultraprodukt $\hat{E}$ von E , dann hat die von $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda \in D}$ $(D := \varrho_+(A))$ auf $\hat{E}$ induzierte Pseudoresolvente $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ im Punkt 0 ebenfalls einen Pol erster Ordnung. Das Residuum $\hat{P}$ ist die kanonische Fortsetzung von P auf $\hat{E}$. Da $\hat{E}$ ein Ultraprodukt ist, hat $\hat{P}$ ebenfalls Rang 1 , also $\hat{P} = \hat{\varphi} \otimes \hat{u}$ für geeignete $\hat{\varphi} \in \hat{E}'_+$, $\hat{u} \in \hat{E}_+$.

Das Ideal $\hat{I} := \{\hat{x} \in \hat{E} : \hat{P}|\hat{x}| = 0\}$ ist $\{\hat{R}(\lambda)\}$-invariant und die von $\{\hat{R}(\lambda)\}$ auf $\tilde{E} := \hat{E}/\hat{I}$ induzierte Pseudoresolvente $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ hat in 0 einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\tilde{P} = \tilde{\varphi} \otimes \tilde{u}$. Dabei ist $\tilde{u} \neq 0$ und $\tilde{\varphi}$ eine strikt positive Linearform.

Schränkt man $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ auf $\check{E} := \overline{\tilde{E}_{\tilde{u}}}$ ein, dann erhält man eine Pseudoresolvente $\{\check{R}(\lambda)\}$ auf $\check{E}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $|\check{R}(\lambda)\check{x}| \leq \check{R}(\operatorname{Re}\lambda)|\check{x}|$ $(\operatorname{Re}\lambda > 0 , \check{x} \in \check{E})$.

(ii) $\{\check{R}(\lambda)\}$ hat in 0 einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\check{P} = \check{\varphi} \otimes \check{u}$, dabei ist $\check{\varphi}$ eine strikt positive Linearform und $\check{u}$ ein quasiinnerer Punkt.

Ist nun $i\alpha \in \sigma_+(A)$, dann gilt $(\lambda - i\alpha)^{-1} \in AP\sigma(R(\lambda, A))$ $(\lambda \in \varrho(A))$, und damit existiert ein $\hat{z} \in \hat{E}$ mit $(\lambda - i\alpha)\hat{R}(\lambda)\hat{z} = \hat{z}$ $(\lambda \in \varrho(A))$. Da sich die Ungleichung 2.2(a) auf das $\mathcal{F}$-Produkt vererbt, gilt für alle $\mu > 0$: $|\hat{z}| = |\mu\hat{R}(\mu + i\alpha)\hat{z}| \leq \hat{R}(\mu)|\hat{z}|$ und somit $\hat{P}|\hat{z}| \geq |\hat{z}| > 0$. Das heißt $\hat{z} \notin \hat{I}$ und damit ist das kanonische Bild $\tilde{z}$ von

$\hat{z}$ in $\tilde{E}$ ungleich 0 . Weiter gilt $\tilde{P}|\tilde{z}| \geq |\tilde{z}|$, und da $\tilde{P}$ strikt positiv ist, folgt $0 < |\tilde{z}| = \tilde{P}|\tilde{z}| = \langle |\tilde{z}|, \tilde{p} \rangle \tilde{u}$. Damit erfüllen $\check{E}$, $\{\check{R}(\lambda)\}$, $\check{z}$ die Voraussetzungen von Prop.2.5' , also folgt $\check{R}(\lambda) = M_{\check{z}}^{-1} \check{R}(\lambda + i\alpha) M_{\check{z}}$ $(\lambda \in D)$.

Wegen (ii) hat dann $\{\check{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\check{Q} = M_{\check{z}}^{-1} \check{P} M_{\check{z}}$, insbesondere gilt $\dim \check{Q}\check{E} = 1$.

Um zurück auf $\{R(\lambda, A)\}$ zu schließen, wenden wir 1.10(c) an: Wegen $\tilde{P}\tilde{E} \subseteq \check{E}$ ist die von $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ auf $\tilde{E}/\check{E}$ induzierte Pseudoresolvente holomorph in 0 , und damit auf $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ gleichmäßig beschränkt. Das heißt, sie ist in jedem Punkt von $i\mathbb{R}$ holomorph fortsetzbar. Aus 1.10(c) folgt, daß $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Für das Residuum $\tilde{Q}$ gilt $\tilde{Q}_{|\check{E}} = \check{Q}$ und aus $\tilde{Q}(\tilde{E}) \subseteq \check{E}$ folgt $\dim \tilde{Q}\tilde{E} = \dim \check{Q}\check{E} = 1$.

Das gleiche Argument zeigt, daß $\{\hat{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Nennt man das Residuum $\hat{Q}$, dann gilt für alle $\hat{x} \in \hat{E}$:

$$|\hat{Q}\hat{x}| = \lim_{\mu \to 0} |\mu \hat{R}(\mu + i\alpha)\hat{x}| \leq \lim_{\mu \to 0} \mu \hat{R}(\mu)|\hat{x}| = \hat{P}|\hat{x}| .$$

Daraus folgt $\hat{I} \subseteq \ker \hat{Q}$ und deshalb haben $\hat{Q}\hat{E}$ und $\tilde{Q}\tilde{E}$ die gleiche Dimension, denn $\tilde{Q}$ ist der von $\hat{Q}$ auf $\hat{E}/\hat{I}$ induzierte Operator .

Da die Vorschrift $T \longmapsto \hat{T}$ einen isometrischen Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{L}(E)$ in $\mathcal{L}(\hat{E})$ definiert, hat $\{\hat{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ genau dann einen Pol erster Ordnung, wenn $\{R(\lambda, A)\}$ dies erfüllt. Da $\hat{E}$ ein Ultraprodukt ist,

sind die Residuuen $\hat{Q}$ und Q von gleichem Rang. Damit haben wir gezeigt, daß jeder Punkt in $\sigma_+(A)$ ein Pol erster Ordnung mit geometrischer Vielfachheit 1 ist.

Beim Nachweis, daß $\sigma_+(A)$ eine Gruppe ist, verwenden wir bereits Bewiesenes. Ist nämlich $i\alpha$, $i\beta \in \sigma_+(A)$, dann gibt es $\check{z}$, $\check{w} \in \check{E}$, so daß $\check{R}(\lambda) = M_{\check{z}}^{-1}\check{R}(\lambda + i\alpha) M_{\check{z}} = M_{\check{w}}^{-1}\check{R}(\lambda + i\beta) M_{\check{w}}$. Daraus folgt $\check{R}(\lambda) = (M_{\check{w}}^{-1}M_{\check{z}})^{-1}\check{R}(\lambda + i\alpha - i\beta)M_{\check{w}}^{-1}M_{\check{z}}$ $(\lambda \in D)$ und somit hat $\{\check{R}(\lambda)\}$ auch in $i\alpha - i\beta$ einen Pol erster Ordnung. Man kann nun wie oben zurück auf $\{R(\lambda, A)\}$ schließen.

(a) Hat die Resolvente in 0 einen Pol beliebiger Ordnung, dann ist die Halbgruppe nach 2.10(b) (w)-auflösbar, das heißt es gibt eine $\{R(\lambda, A)\}$-invariante Idealkette $\{0\} = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n = E$. Die von $\{R(\lambda, A)\}$ auf $E_r := {}^{I_r}/_{I_{r-1}}$ induzierte Pseudoresolvente $\{R_r(\lambda)\}$ hat in 0 einen Pol erster Ordnung, denn $\{\mu R_r(\mu) : \mu > 0\}$ ist gleichmäßig beschränkt. Wegen 1.10(c) genügt es zu zeigen, daß die Pseudoresolventen $\{R_r(\lambda)\}$ in $i\mathbb{R}$ nur Pole besitzen, und daß die Menge dieser Pole jeweils aus einer endlichen Vereinigung von Untergruppen besteht. Mit anderen Worten: Wir können annehmen, daß $\{R(\lambda, A)\}$ in 0 einen Pol erster Ordnung besitzt.

Das Residuum P ist dann eine positive Projektion, wir können sogar annehmen, daß P strikt positiv ist. Andernfalls sind die auf I und ${}^{E}/_{I}$ induzierten Pseudoresol-

venten zu betrachten, wobei $I := \{ x \in E : p|x| = 0 \}$.
Die strikte Positivität impliziert, daß PE ein Unterverband [S, III.11.5] und damit isomorph zu $\mathbb{C}^n$ [S, II.3.9 Cor.1] ist. Es gibt dann eine Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ von PE mit $e_i \wedge e_j = 0$ $(i \neq j)$. Setzt man $e := \sum e_i$, dann gilt $\overline{E_e} = \oplus \overline{E_{e_i}}$ [S, III.1.2]. Wegen $PE \subseteq \overline{E_e}$ ist die von $R(\lambda, A)$ auf $E/\overline{E_e}$ induzierte Pseudoresolvente holomorph in 0, und für die Einschränkungen von $R(\lambda, A)$ auf $\overline{E_{e_i}}$ $(i = 1,2,..,n)$ sind die Voraussetzungen von Teil (b) erfüllt. Wendet man ein letztes Mal 1.10(c) an, dann folgt, daß $R(\lambda, A)$ in $i\mathbb{R}$ ausschließlich Pole hat und diese eine endliche Vereinigung von Untergruppen von $i\mathbb{R}$ bilden.

Ehe wir anhand eines Beispieles zeigen, daß man auf die Endlichdimensionalität in der Voraussetzung des Satzes nicht verzichten kann, wollen wir eine Bemerkung zu den Untergruppen machen, aus denen sich das Randspektrum zusammensetzt. Eine genaue Analyse des Beweises von Teil (a) zeigt, daß die Anzahl dieser Untergruppen durch das Produkt aus Polordnung und Dimension von $\ker A$ beschränkt ist.

2.13 Beispiel : Es sei (τ_n) eine Folge positiver, reeller Zahlen. Nun betrachte man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Rotationshalbgruppe mit Periode τ_n auf Γ, das heißt $E_n := C(\Gamma)$, $T_n(t) := R_{\tau_n}(t)$ $(t \geq 0)$ (vgl. 1.21).

Setzt man $E := c_o\text{-}\oplus E_n = \{(f_n) \in \prod E_n : \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0\}$,
$T(t)((f_n)) := (T_n(t)f_n)$, falls $(f_n) \in E$, $t \geq 0$.
dann ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe positiver Operatoren auf dem AM-Raum E . Der Fixraum der Halbgruppe (bzw. der Kern des Generators) ist unendlichdimensional. Ist 0 kein Häufungspunkt der Folge (τ_n) , dann ist 0 ein Pol der Resolvente. Die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i\frac{2\pi}{\tau_n}\mathbb{Z}$ liegt im Randspektrum der Halbgruppe. Wählt man die Folge so, daß $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ im Intervall $[\pi, 2\pi]$ dicht liegt, dann gilt für das Randspektrum $\sigma_+(A) = \{i\alpha : |\alpha| \geq 1\} \cup \{0\}$. In diesem Fall ist nur 0 ein Pol der Resolvente.

Mit Hilfe von Theorem 2.12 kann man die positiven Gruppen beschreiben, deren Resolvente in 0 einen Pol mit endlichdimensionalem Residuum hat. H. Uhlig [43] hat dieses Resultat unter der stärkeren Voraussetzung, daß der Generator kompakte Resolvente habe, bewiesen.
Zunächst betrachten wir den irreduziblen Fall:

2.14 PROPOSITION Für eine beschränkte, positive Gruppe $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ auf einem Banachverband E mit $\dim E > 1$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Der Fixraum ist eindimensional und 0 ist ein Pol der Resolvente.

(b) Die (Halb-)Gruppe ist periodisch und irreduzibel.

(c) Es gibt ein $\tau > 0$ und injektive Verbandshomomorphismen i, j mit dichtem Bildbereich, so daß das folgende Diagramm für alle $t \in \mathbb{R}$ kommutiert. Dabei ist $j \cdot i$ die kanonische Inklusion von $C(\Gamma)$ in $L^1(\Gamma, m)$.

$$\begin{array}{ccccc} C(\Gamma) & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{j} & L^1(\Gamma, m) \\ \downarrow R_\tau(t) & & \downarrow T(t) & & \downarrow R_\tau(t) \\ C(\Gamma) & \xrightarrow[i]{} & E & \xrightarrow[j]{} & L^1(\Gamma, m) \end{array}$$

Beweis: "(a) $\Longrightarrow$ (b)": 0 ist ein Pol erster Ordnung, da die Gruppe beschränkt ist. Nach 2.12(b) besteht dann $\sigma(A) = \sigma_+(A)$ nur aus Polen erster Ordnung und es gilt $\sigma(A) = i\alpha\mathbb{Z}$ für ein $\alpha \geq 0$. Der von den Eigenvektoren des Generators erzeugte abgeschlossene, lineare Teilraum E_o ist invariant und $\{T(t)\}$ induziert auf E/E_o ein beschränkte Gruppe mit leerem Spektrum. Aus Prop.1.25(b) folgt $E/E_o = \{0\}$ oder $E_o = E$. Da $\dim \ker A = 1 < \dim E_o$, folgt $\alpha > 0$ und setzt man $\tau := \frac{2\pi}{\alpha}$, dann gilt für jeden Eigenvektor von A wegen Prop.1.23(b) $T(\tau)x = x$. Da die Eigenvektoren total sind ($E = E_o$!), folgt $T(\tau) = Id$, das heißt $\{T(t)\}$ ist periodisch.

Daß die Halbgruppe irreduzibel ist, sieht man wie folgt: Nach Voraussetzung ist das Residuum von der Form $P = \varphi \otimes u$, wobei $\varphi \in E'_+$, $u \in E_+$. u ist ein quasiinnerer Punkt, da alle Eigenvektoren des Generators im Hauptideal E_u ent-

enthalten sind. φ ist strikt positiv, denn andernfalls wäre $\{T(t)\}_{|I}$ ($I := \{x \in E : \varphi(|x|) = 0\}$) eine positive periodische Gruppe mit $0 \notin \sigma(A)$, ein Widerspruch zu 2.7 . Die Irreduzibilität folgt nun aus [S, III.8.5].

Die Implikation "(b) $\Longrightarrow$ (c)" ist ein Spezialfall von [S, III.10.4] und "(c) $\Longrightarrow$ (a)" ist klar.

2.15 PROPOSITION Es sei $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ein beschränkte, positive Gruppe auf dem Banachverband E. Ist 0 ein Pol der Resolvente und $\dim \ker A = n < \infty$, dann ist E die direkte Summe von $\{T(t)\}$-invarianten, paarweise orthogonalen Bändern $E_1, E_2, \ldots, E_n$ und die positiven Gruppen $\{T(t)\}_{|E_k}$ sind periodisch und irreduzibel.

Beweis: Wie im Beweis von 2.14 (a) $\Longrightarrow$ (b) zeigt man zunächst, daß die Halbgruppe periodisch ist.
Das Residuum P im Punkt 0 ist strikt positiv, denn andernfalls wäre $\{T(t)\}_{|I}$ ($I := \{x \in E : P|x| = 0\}$) eine periodische positive Gruppe mit $0 \notin \sigma(A)$.
Damit ist PE ein Unterverband [S, III.11.5], also isomorph zu $\mathbb{C}^n$ [S, II.3.9 Cor.1] . Nun gibt es eine Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ von PE mit $e_i \wedge e_j = 0$, falls $i \neq j$.
Die abgeschlossenen Ideale $E_i := \overline{E_{e_i}}$ sind paarweise orthogonal und $\oplus E_i$ ist ein abgeschlossenes Ideal [S, III.1.2],

das alle Eigenvektoren des Generators enthält. Aus 1.21 folgt dann $\bigoplus E_i = E$. Damit ist jedes E_i ein Projektionsband. Es ist klar, daß $\{T(t)\}_{|E_i}$ periodisch ist, und die Irreduzibilität folgt aus Prop.2.14 .

3. DIE EIGENWERTE IM RANDSPEKTRUM

Auch dieses Kapitel ist dem Randspektrum positiver Halbgruppen gewidmet. Im Mittelpunkt des Interesses steht aber nicht mehr das gesamte Randspektrum, sondern die eventuell kleinere Menge der Eigenwerte im Randspektrum. Damit verbunden ist die Untersuchung der zugehörigen Eigenvektoren, beziehungsweise des von den Eigenvektoren erzeugten linearen Teilraumes.

Zunächst werden die Zusammenhänge zwischen dem Fixraum der Halbgruppe und den Fixräumen der einzelnen Operatoren untersucht (3.1 - 3.3).

Der erste Hauptsatz behandelt beschränkte, irreduzible Halbgruppen. Es wird gezeigt, daß die Eigenwerte des Randspektrums eine (additive) Untergruppe von $i\mathbb{R}$ bilden. Außerdem wird die Wirkung der Halbgruppe auf dem von den zugehörigen Eigenvektoren erzeugten Teilraum beschrieben.

Im zweiten wichtigen Satz (3.5) sind Bedingungen angegeben, unter denen die Menge der Eigenwerte im Randspektrum additiv zyklisch ist. Dabei handelt es sich um Wachstumsbedingungen an die Resolvente, ähnlich denen von Theorem 2.11 .

Die restlichen Ausführungen behandeln positive Kontraktionshalbgruppen auf Räumen $L^p(\mu)$. In Analogie zu einem Resultat von H. H. Schaefer [37] wird gezeigt, daß solche Halb-

gruppen immer dann die Rotationshalbgruppe auf $L^p(\Gamma, m)$ "enthalten", wenn sie nichttriviales Punktspektrum besitzen (3.7).

Bei der Untersuchung des Punktspektrums stark stetiger Halbgruppen hat man es etwas leichter, als bei der Behandlung des gesamten Spektrums: Es steht der spektrale Abbildungssatz "$e^{tP\sigma(A)} = P\sigma(T(t))\setminus\{0\}$" zur Verfügung (1.23). Dennoch bleiben einige Fragen offen. Ist beispielsweise 1 ein Eigenwert eines Operators $T(s)$ $(s > 0)$, dann folgt aus der Beziehung $e^{sP\sigma(A)} = P\sigma(T(s))$ nur, daß einer der Punkte $i\frac{2\pi}{s}n$ $(n \in \mathbb{Z})$ im Punktspektrum der Halbgruppe liegt. Im allgemeinen (nicht positiven) Fall kann man nicht folgern, daß dies der Punkt 0 ist. Und selbst wenn dies richtig ist, wird nicht jeder Fixpunkt des Operators $T(s)$ im Kern des Generators liegen, das heißt ein Fixpunkt der Halbgruppe sein (vgl. 1.23(b)). Im Falle positiver Halbgruppen sind solche Aussagen möglich, wie die folgenden Sätze zeigen.

3.1 PROPOSITION $\{T(t)\}$ sei eine positive Halbgruppe.

(a) Besitzt ein Operator $T(s)$ $(s > 0)$ einen positiven Fixvektor, dann besitzt die Halbgruppe $\{T(t)\}$ positive Fixvektoren.

(b) Gibt es für ein $s > 0$ eine positive, $T(s)$-invariante Linearform, dann existieren positive,

$\{T(t)\}$-invariante Linearformen.

Beweis: (a) Es gelte $T(s)x = x$, wobei $x > 0$. Nun gibt es ein $x' \in E'_+$, so daß $\langle x, x' \rangle > 0$. Daraus folgt $\langle \int_0^s T(t)x\,dt, x' \rangle = \int_0^s \langle T(t)x, x' \rangle\,dt > 0$, insbesondere ist $y := \int_0^s T(t)x\,dt > 0$. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r \leq s$ gilt $T(r)y = \int_0^s T(r+t)x\,dt = \int_r^{s+r} T(t)x\,dt + \int_s^{s+r} T(t-s)T(s)x\,dt$ $= \int_r^s T(t)x\,dt + \int_0^r T(t)x\,dt = \int_0^s T(t)x\,dt = y$.
Ist $r \in \mathbb{R}_+$ beliebig, und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $r < ns$, dann folgt $T(r)y = T(\frac{r}{n})^n y = y$. Damit ist y ein positiver Fixvektor der Halbgruppe.

(b) Ist $x' \in E'_+$, $x' \neq 0$ und gilt $T(s)'x' = x'$, dann definiert man $y' \in E'$ wie folgt:
$\langle x, y' \rangle := \int_0^s \langle T(t)x, x' \rangle\,dt$ $(x \in E)$. Ähnlich wie in (a) zeigt man, daß $y' > 0$ und $T(r)'y' = y'$ für alle $r \in \mathbb{R}_+$.

Aufgrund eines Satzes von Krein-Rutman [35, App.2.6.Cor.] ist das folgende Korollar eine unmittelbare Folgerung von 3.1(b). Aus dem Korollar folgt, daß für positive Halbgruppen auf $C(K)$ stets $s(A) = \omega_0$ gilt (vgl.2.4(b)).

3.2 KOROLLAR Ist K kompakt und $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf $C(K)$ vom Typ $\omega_0 > -\infty$, dann gibt es eine positive Linearform μ mit $T(t)'\mu = e^{\omega t}\mu$ $(t \geq 0)$.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, sei daran erinnert, daß der Kern des Generators mit dem Fixraum der Halbgruppe identisch ist (1.23(b)).

3.3 PROPOSITION $\{T(t)\}$ sei eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E und für ein $s > 0$ sei $\ker(1 - T(s))$ endlichdimensional.
Jede der folgenden Bedingungen impliziert $\ker A = \ker(1 - T(s))$.

(a) Es gilt $\ker(1 - T(s)) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ für ein $x > 0$.

(b) Der Operator $T(s)$ ist mittelergodisch.

(c) $T(s)$ ist ein Verbandshomomorphismus.

(d) Es gibt eine strikt positive, $T(s)$-invariante Linearform.

(e) Die Halbgruppe ist beschränkt und E ist ein Band im Bidual .

Ein Banachverband ist genau dann ein Band in seinem Bidual, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist [S, II.5.15] :
Jede nach oben gerichtete, normbeschränkte Familie in E konvergiert in der Norm.
Diese Eigenschaft besitzen alle reflexiven Banachverbände, sowie die Räume $L^1(\mu)$.

Beweis von 3.3 : Kann man zeigen, daß $\ker(1 - T(s))$ ein Vektorverband ist, dann ergibt sich die Behauptung wie folgt: Die Einschränkung $\{T(t)\}_{|\ker(1-T(s))}$ ist eine positive, periodische Halbgruppe, also nach 2.8 trivial. Die Bedingungen (a), (c) und (d) implizieren, daß $\ker(1 - T(s))$ ein Unterverband von E ist.
Im Fall (b) ist $\ker(1 - T(s))$ das Bild einer positiven Projektion, also nach [S, III.11.5] ein Vektorverband, (nicht notwendig ein Unterverband von E!).
Nun nehmen wir an, daß (e) erfüllt ist. Setzt man $F := \ker(1 - T(s))$, dann liegt mit x auch der konjugierte Vektor $\bar{x}$ in F, somit gilt $F = F \cap E_{\mathbb{R}} + i(F \cap E_{\mathbb{R}})$. Ist nun $x \in F$, $x = \bar{x}$, dann folgt aus $T(s)x = x$ $|x| \leq T(s)|x|$. Wiederholtes Anwenden von $T(s)$ auf diese Ungleichung ergibt $|x| \leq T(s)|x| \leq T(s)^2|x| \leq \ldots \leq T(s)^n|x| \leq$, das heißt die Folge $(T(s)^n|x|)$ ist nach oben gerichtet. Da sie durch $\|x\| \sup\{\|T(t)\| : t \in \mathbb{R}_+\}$ beschränkt ist, existiert $y := \lim_{n \to \infty} T(s)^n|x|$. Es gilt $T(s)y = \lim T(s)^{n+1}|x| = y$, das heißt $y \in F$ und es ist klar, daß y das in F gebildete Supremum von x und $-x$ ist.

Wir wenden uns nun der Frage zu, unter welchen Voraussetzungen die Menge der Eigenwerte im Randspektrums additiv zyklisch ist. Zunächst betrachten wir den Fall irreduzibler Halbgruppen. Bevor wir den Satz — das Analogon eines Resultates von H. H. Schaefer [S, V.5.2] —

formulieren, müssen wir einen Begriff erklären.
Eine lokalkompakte, abelsche Gruppe heißt solenoidal , falls es einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\varkappa : \mathbb{R} \longrightarrow G$ gibt, dessen Bild in G dicht liegt. Wir sagen dann "$(G, \varkappa)$ ist solenoidal".
Definiert man für $t \in \mathbb{R}$, $f \in E := C^b(G)$ oder $L^p(G)$
$R_\varkappa(t)f(g) := f(g + \varkappa(t))$ $(g \in G)$,
dann ist $R_\varkappa(t)$ ein Verbandsisomorphismus. $\{R_\varkappa(t)\}$ ist eine irreduzible, positive Halbgruppe auf $L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ und falls G kompakt ist, auch auf $C(G)$.
Beispiele solenoidaler Gruppen sind die Kreisgruppe $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und die Tori Γ^n $(n \in \mathbb{N})$.
Allgemein gilt für eine kompakte, abelsche Gruppe G : G ist dann und nur dann solenoidal, wenn die duale Gruppe $\hat{G}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist [2, II.2.Exc.10].

3.4 THEOREM Es sei $\{T(t)\}$ eine irreduzible, positive Halbgruppe mit $s(A) = 0$ und es gebe eine $\{T(t)\}$ - invariante positive Linearform $0 < \varphi \in E'$.
Ist $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$, dann gilt:

(a) Der Fixraum der Halbgruppe ist eindimensional und wird von einem quasiinneren Punkt aufgespannt.

(b) Ist λ Eigenwert eines Operators $T(s)$ mit einem positiven Eigenvektor, dann ist $\lambda = 1$.

(c) Für jeden Vektor $x \neq 0$, der $Ax = i\alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ genügt, ist $|x|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+, $M_x(D(A)) \subseteq D(A)$ und $A = M_{\overline{x}}(A + i\alpha)M_x$. Insbesondere gilt:
$P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ ist eine Gruppe;
$\sigma(A) + (P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}) = \sigma(A)$;
jedes Element von $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ ist einfacher Eigenwert.

(d) Gilt zusätzlich $\sup\{\|T(t)\| : t > 0\} < \infty$, dann ist $E_0 := \overline{\text{lin}}\{x \in D(A) : \text{es gibt } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ so daß } Ax = i\alpha x\}$ ein abgeschlossener, $\{T(t)\}$-invarianter Unterverband von E. Es existieren eine kompakte, solenoidale Gruppe $(G, \varkappa)$ und injektive Verbandshomomorphismen mit dichtem Bild i, j, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} C(G) & \xrightarrow{i} & E_0 & \xrightarrow{j} & L^1(G) \\ \Big\downarrow R_\varkappa(t) & & \Big\downarrow T(t) & & \Big\downarrow R_\varkappa(t) \\ C(G) & \xrightarrow{i} & E_0 & \xrightarrow{j} & L^1(G) \end{array}$$

Bevor wir den Satz beweisen, folgen ein paar Anmerkungen zu den Voraussetzungen.

Gilt für ein $s > 0$ $P\sigma(T(s)) \cap \Gamma \neq \emptyset$, dann ist $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$.

Ist $s(A) = 0$ ein Pol der Resolvente, dann gibt es $0 < x \in E$, $0 < x' \in E'$, so daß $T(t)x = x$, $T(t)'x' = T(t)'x'$ für alle $t > 0$. Dies ist insbesondere dann erfüllt, wenn für ein $s > 0$ die Resolvente von $T(s)$ in 1 einen Pol hat (1.23(c)).

Ist $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf $C(K)$ vom Typ $\omega_0 = 0$, dann gibt es ein $0 < \mu \in C(K)'$ mit $T(t)'\mu = \mu$ $(t > 0)$ (3.2).

Ist $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ und erfüllt $\{T(t)\}$ die (w)-Bedingung (2.9), dann gibt es ein $0 < x' \in E'$ mit $T(t)'x' = x'$ $(t > 0)$.

Erfüllt ein Operator $T(s)$ die Voraussetzungen von [S, V.5.2], dann erfüllt die Halbgruppe $\{T(t)\}$ die Voraussetzungen von Satz 3.4.

Beweis von 3.4: Da $\{x \in E : \langle |x|, \varphi \rangle = 0\}$ ein $\{T(t)\}$-invariantes Ideal ist, folgt aus der Irreduzibilität, daß φ eine strikt positive Linearform ist. Aus $Ax = i\alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x \neq 0)$ folgt $T(t)x = e^{i\alpha t}x$ $(t \geq 0)$ und daraus $T(t)|x| \geq |x|$ $(t \geq 0)$. Aus $\langle T(t)|x| - |x|, \varphi \rangle = 0$ folgt dann $T(t)|x| = |x|$ $(t \geq 0)$ oder $A|x| = 0$. Daß $|x|$ ein quasiinnerer Punkt ist, folgt aus der Irreduzibilität, denn das Hauptideal $E_{|x|}$ ist $\{T(t)\}$-invariant.
Aus dieser Überlegung und Prop.2.5 folgt die Aussage (c). Sie zeigt aber auch, daß $\ker A$ ein von Null verschiedener Unterverband ist. Aus der Irreduzibilität folgt dann $\dim \ker A = 1$, und damit ist (a) bewiesen.

(b) Ist $s > 0$ und gilt $T(s)x = \lambda x$ für ein $x > 0$, so folgt $\lambda \langle x, \varphi \rangle = \langle T(s)x, \varphi \rangle = \langle x, T(s)'\varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle$.
Da φ strikt positiv ist, folgt $\langle x, \varphi \rangle > 0$ also $\lambda = 1$.

(d) Es sei u der quasiinnere Fixpunkt der Halbgruppe,

$\|u\| = 1$, $H := P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$, für $\eta \in H$ sei $V_\eta := \{x \in D(A) : Ax = \eta x \, , \, |x| = u\}$ und $V := \bigcup_{\eta \in H} V_\eta$. Aus (c) folgt dann, daß mit x, y auch $\operatorname{sign} x.y$ in V liegt. Das heißt: Betrachtet man V als Teilmenge von $E_u \cong C(K)$, dann ist V eine Untergruppe der unimodularen Funktionen auf K . Es folgt, daß $\{\sum \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}, u_i \in V\}$ eine *-Unteralgebra von $C(K)$ ist, und damit ist der Abschluß in der Supremumsnorm ein Unterverband von $C(K)$. Der Abschluß dieses Unterverbandes in E ist gerade E_o , und damit ist die E_o betreffende Aussage bewiesen.
Die Einschränkung von $\{T(t)\}$ auf E_o ist eine stark stetige, beschränkte Halbgruppe; sie wird im folgenden mit $\{T_o(t)\}$ bezeichnet. Wir setzen $G := \{T_o(t) : t \geq 0\}^{\mathcal{L}_s}$ und beweisen folgende Eigenschaften von G :

(1) G ist kompakt in $\mathcal{L}_s(E_o)$;

(2) für jedes $s > 0$ gilt $\mathrm{Id} \in \{T_o(t) : t > s\}^{\mathcal{L}_s}$;

(3) G ist eine irreduzible Gruppe positiver Operatoren.

(1): Ist $x \in V_\eta$ $(\eta \in H)$, so ist $\{T_o(t)x\} = \{e^{\eta t}x\}$ kompakt in E_o . Da $V = \bigcup V_\eta$ in E_o total und die Halbgruppe in $\mathcal{L}(E_o)$ beschränkt ist, folgt die Behauptung aus [35, III.4.5] .

(2): Es genügt zu zeigen, daß zu $x_1, x_2, .., x_n \in V$, $s \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$ ein $t > s$ existiert, mit
$\sup_{1 \leq k \leq n} \|T_o(t)x_k - x_k\| < \varepsilon$.
Nun gibt es zu $x_k \in V$ ein $\eta_k \in H$, so daß $T_o(t)x_k = e^{\eta_k t}x_k$.
Der Homomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma^n : t \longmapsto (e^{\eta_1 t}, \ldots, e^{\eta_n t})$

ist entweder periodisch oder er hat dichtes Bild. In jedem Fall existiert ein $t > s$ mit $|\gamma(t) - (1, \dots, 1)| < \varepsilon$.

(3): Aufgrund von (2) gibt es auf $(0, \infty)$ einen gegen ∞ konvergenten Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\lim_{\mathcal{U}} T_o(t) = \mathrm{Id}$. Für $S := \lim_{\mathcal{U}} T_o(t - s)$ gilt dann $S \in G$ und $S \cdot T_o(s) = T_o(s) \cdot S = \mathrm{Id}$.

Dies zeigt, daß jedes $T_o(t)$ $(t > 0)$ invertierbar ist und $T_o(t)^{-1}$ in G liegt. Damit ist G als Abschluß einer relativkompakten Gruppe in $\mathcal{L}_s(E_o)$ selbst eine Gruppe. Daß sie aus positiven Operatoren besteht, folgt unmittelbar aus der Definition. Bleibt zu zeigen, daß G irreduzibel ist.

Nach [S, III.7.9 Cor.1] ist G mittelergodisch. Für die mittelergodische Projektion P gilt:

$\langle Px, x' \rangle = \int \langle Tx, x' \rangle \, dm(T)$ $(x \in E_o, x' \in E_o')$,

dabei ist m das Haarsche Maß auf G. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß P strikt positiv ist, außerdem gilt $\dim PE_o = 1$, da der Fixraum der Halbgruppe $\{T_o(t)\} \subseteq G$ eindimensional ist. Die Irreduzibilität folgt nun aus [S, III.8.5] und damit sind die Zwischenbehauptungen (1) - (3) bewiesen.

Definiert man $\varkappa : \mathbb{R} \longrightarrow G$ durch $\varkappa(t) := \begin{cases} T_o(t) & \text{falls } t \geq 0 \\ T_o(t)^{-1} & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$ dann ist $\varkappa$ ein stetiger Homomorphismus mit dichtem Bild, das heißt, $(G, \varkappa)$ ist solenoidal. Die Existenz von i und j sowie das kommutierende Diagramm folgen aus [S, III.10.4].

Nachdem der Satz bewiesen ist, wollen wir noch einige Anmerkungen zur vierten Aussage machen:

Die kompakte Gruppe $G = \{T_o(t) : t \geq 0\}^{-\mathcal{X}_s}$ und die diskrete Gruppe $H = P\sigma(A) \cap iR$ sind im Sinne lokalkompakter, abelscher Gruppen zueinander dual (also $G = \hat{H}$).

Allgemeiner hätte man zeigen können, daß es zu jeder Untergruppe H von $P\sigma(A) \cap iR$ einen abgeschlossenen, $\{T(t)\}$-invarianten Unterverband E_H von E sowie Verbandshomomorphismen i, j gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert. Dabei ist $\varkappa : \mathbb{R} \longrightarrow \hat{H}$, die zur Inklusion $H \subseteq iR$ duale Abbildung.

$$\begin{array}{ccccc} C(\hat{H}) & \xrightarrow{i} & E_H & \xrightarrow{j} & L^1(\hat{H}) \\ \downarrow R_\varkappa(t) & & \downarrow T(t) & & \downarrow R_\varkappa(t) \\ C(\hat{H}) & \xrightarrow{i} & E_H & \xrightarrow{j} & L^1(\hat{H}) \end{array}$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen (z.B.: E reflexiv) ist E_o das Bild einer strikt positiven Projektion, die die Halbgruppe $\{T(t)\}$ reduziert (vgl. [S, III.11.6]).

Ist umgekehrt eine solenoidale, kompakte Gruppe $(G, \varkappa)$ gegeben, dann erfüllt die positive Halbgruppe $\{R_\varkappa(t)\}$ die Voraussetzungen von Satz 3.4 . Ist G die duale Gruppe von $\mathbb{R}_d$, dann gilt $P\sigma(A) \cap iR = iR$. Damit ist der Fixraum jedes Operators $R_\varkappa(t)$ unendlichdimensional (1.23(b)) . In diesem Fall ist zwar die Halbgruppe

irreduzibel, aber keiner der Operatoren $R_x(t)$.

Daß unter den Voraussetzungen von 3.4 $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ eine Gruppe ist, liegt in erster Linie an der Irreduzibilität der Halbgruppe. Ohne diese Voraussetzung kann man bestenfalls erwarten, daß $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ additiv zyklisch ist. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich der Fall. Ein Spezialfall des diskreten Analogons wurde von E. Scheffold bewiesen [40, 3.5].

3.5 THEOREM Ist der Banachverband E ein Band in seinem Bidual und $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf E mit $s(A) = 0$, die die (w)-Bedingung erfüllt, dann ist $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ additiv zyklisch.

Beweis: Es sei $i\alpha \in P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$. Wir müssen beweisen, daß $ik\alpha \in P\sigma(A)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, was gleichbedeutend mit $1 \in P\sigma(\mu R(\mu + ik\alpha, A))$ $(\mu > 0, k \in \mathbb{Z})$ ist.

Aus $Ax = i\alpha x$ folgt $T(t)x = e^{i\alpha t}x$ $(t \geq 0)$ und daraus $|x| = |T(t)x| \leq T(t)|x| = T(t)|T(s)x| \leq T(t+s)|x|$.
Das heißt, das Netz $\{T(t)|x|\}_{t \geq 0}$ ist monoton wachsend.
Ist nun $M := \sup\{\|\mu R(\mu, A)\| : 0 < \mu < 1\}$, dann gilt für $r > 0$:
$R(\mu, A)|x| = \int_0^\infty e^{-\mu s} T(s)\, x\, ds \geq \int_r^\infty e^{-\mu s} T(r)|x|\, ds = \frac{1}{\mu} e^{-\mu r} T(r)|x|$
und man erhält $\|e^{-\mu r} T(r)|x|\| \leq \|\mu R(\mu, A)|x|\| \leq M\|x\|$.
Da diese Abschätzung für alle $\mu \in (0,1)$ richtig ist, folgt $\|T(r)|x|\| \leq M\|x\|$ und da E ein Band in E'' ist,

existiert $z := \lim_{t\to\infty} T(t)|x|$ (vgl. Anm. zu 3.3). Es gilt $T(t)z = z$ für alle $t \geq 0$ und $|x| \leq z$.
Für die Resolvente $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda\in D}$ $(D := \{\lambda \in C : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\})$ bedeutet dies:

$$\lambda R(\lambda + i\alpha, A)x = x \quad (\lambda \in D)$$
$$\lambda R(\lambda, A)z = z \quad (\lambda \in D)$$
$$|x| \leq z .$$

Wegen 2.2(a) und der zweiten Gleichung induziert $\{R(\lambda, A)'\}_{\lambda\in D}$ eine Pseudoresolvente $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda\in D}$ auf dem AL-Raum (E', z). Für diese gilt:

(1) $|\hat{R}(\mu + i\nu)\hat{x}| \leq \hat{R}(\mu)|\hat{x}|$ $(\mu > 0, \nu \in \mathbb{R}, \hat{x} \in (E', z))$;

(2) $\|\mu\hat{R}(\mu + i\nu)\| \leq 1$ $(\mu > 0, \nu \in \mathbb{R})$;

(3) es gibt ein $\hat{y} \in (E', z)$, so daß
$\mu\hat{R}(\mu + ik\alpha)\hat{y}^{(k)} = \hat{y}^{(k)}$ $(\mu > 0, k \in \mathbb{Z})$.

Aussage (1) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda\in D}$ (vgl. 2.2(a)) und (2) ergibt sich dann aus $\mu R(\mu, A)z = z$ $(\mu > 0)$.
Nun zur dritten Behauptung. Wegen 2.2(a) und der (w)-Bedingung, ist $\{\mu R(\mu + i\alpha, A)'x' : 0 < \mu < 1\}$ in E' beschränkt, für jedes $x' \in E'$. Wählt man ein x' mit $\langle x, x'\rangle \neq 0$ und einen gegen 0 konvergenten Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $(0,1)$, dann existiert
$y' := \lim_{\mu\to\mathcal{U}} \mu R(\mu + i\alpha, A)'x'$ (bzgl. $\sigma(E', E)$)
und aus der Resolventengleichung folgt $\lambda R(\lambda + i\alpha, A)'y' = y'$
Außerdem gilt $\langle z, |y'|\rangle \geq |\langle x, y'\rangle| =$
$= \lim |\langle \mu R(\mu + i\alpha, A)x, x'\rangle| = |\langle x, x'\rangle| > 0$.

Damit gilt für das kanonische Bild $\hat{y}$ von y' in (E',z) : $\hat{y} \neq 0$ und $\mu\hat{R}(\mu+i\alpha)\hat{y} = \hat{y}$ $(\mu > 0)$.
Aus (1) folgt $\mu\hat{R}(\mu)|\hat{y}| \leq |y|$, daraus
$\|\mu\hat{R}(\mu)|\hat{y}| - |\hat{y}|\| = \langle \mu\hat{R}(\mu)|\hat{y}| - |\hat{y}|, z\rangle = 0$ und man erhält
$\mu\hat{R}(\mu)|\hat{y}| = |\hat{y}|$. Die Bedingung (3) ergibt sich nun aus 2.5'.

Wählt man zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ ein $\psi_k \in (E',z)'$ mit $\langle y^{(k)}, \psi_k\rangle \neq 0$ und einen gegen 0 konvergenten Ultrafilter auf $(0,1)$, dann existiert wegen (2) $\varphi_k := \lim \mu\hat{R}(\mu + ik\alpha)'\psi_k$. Es gilt $\langle y^{(k)}, \varphi_k\rangle = \langle y^{(k)}, \psi_k\rangle$, insbesondere ist φ_k ungleich Null und
$\lambda\hat{R}(\lambda + ik\alpha)'\varphi_k = \varphi_k$ $(\lambda \in D$, $k \in \mathbb{Z})$.

Die Behauptung des Theorems ergibt sich nun aus der folgenden Überlegung:
Bekanntlich ist $(E',z)'$ isomorph zu E''_z [S, IV.Excer.9] und unter dieser Identifikaton entspricht dem Operator $\hat{R}(\lambda)'$ die Einschränkung von $R(\lambda, A)''$ auf E''_z . Da E ein Band in E'' ist, gilt $E''_z = E_z$ und somit $\hat{R}(\lambda)' = R(\lambda, A)|_{E_z}$. Damit sind die Elemente φ_k Fixvektoren von $\mu R(\mu + ik\alpha, A)$ und dies war, wie eingangs erwähnt, nachzuweisen.

Der Beweis dieses Theorems vereinfacht sich wesentlich, wenn man zeigen kann, daß $\ker(1 - T(t))$ $(t > 0)$ unter der von E induzierten Ordnung und einer äquivalenten Norm ein Banachverband ist. Dies ist beispielsweise unter

der stärkeren Voraussetzung " E ist ein Band in seinem Bidual und $\sup\{\|T(t)\| : t \geq 0\} < \infty$" erfüllt (vgl. Beweis von 3.3(e)).

In diesem Fall kann man wie folgt schließen:

Ist $i\alpha \in P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ und setzt man $F := \ker(1 - T(\frac{2\pi}{\alpha}))$, dann ist $\{T(t)\}_{|F}$ eine positive, periodische Halbgruppe, in deren Punktspektrum $i\alpha$ liegt. Da jeder Spektralwert einer periodischen Halbgruppe ein Eigenwert ist (1.21), folgt die Behauptung aus 2.7 .

Diese Überlegungen zeigen, daß das Punktspektrum auch dann additiv zyklisch ist, wenn E beliebig, aber jeder Operator T(t) mittelergodisch ist. In diesem Fall ist $\ker(1 - T(t))$ das Bild einer positiven Projektion und somit ein Banachverband [S , III.11.5] .

Der letzte Satz dieses Abschnittes knüpft an die vierte Aussage von Theorem 3.4 an. Wie aus den Anmerkungen im Anschluß an den Beweis von 3.4 ersichtlich ist, gilt für Halbgruppen $\{T(t)\}$, die die Voraussetzungen von 3.4(e) erfüllen und die rein imaginäre Eigenwerte $i\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ besitzen, folgendes:

Es gibt einen $\{T(t)\}$-invarianten Unterverband, der zu $C(\Gamma)$ isomorph ist und auf dem $\{T(t)\}$ die Rotationshalbgruppe induziert.

Wir wollen dies für Kontraktionshalbgruppen auf L^p-Räumen

beweisen, ohne Irreduzibilität vorauszusetzen. Dabei handelt es sich um das kontinuierliche Analogon eines Resultates von H. H. Schaefer [37].

Zunächst müssen wir etwas erläutern und einen Hilfssatz beweisen.

Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum, $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$

Falls $f \in L^p(\mu)$, dann wird $\check{f}$ wie folgt definiert:

$\check{f}(s) := \frac{|f(s)|^p}{f(s)}$ ($\check{f}(s) = 0$, falls $f(s) = 0$).

Es gilt dann $\check{f} \in L^q(\mu)$ und $\langle f, \check{f} \rangle = \|f\|_p^p = \|\check{f}\|_q^q$.

Die in 1.27 definierten Funktionen $f^{(k)}$ ($k \in \mathbb{Z}$) sind durch $f^{(k)}(s) = f(s)^k |f(s)|^{1-k}$ gegeben.

3.6 LEMMA Es sei (X,Σ,μ) ein Maßraum, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Ist T eine positive Kontraktion auf $L^p(\mu)$ mit $Tf = \alpha f$, dann gilt:

(a) $Tf^{(k)} = \alpha^k f^{(k)}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(b) $T\check{f}^{(k)} = \alpha^k \check{f}^{(k)}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(c) $\{|f|\}^{\perp}$ und $\{|f|\}^{\perp\perp}$ sind T-invariante Bänder.

Beweis: (a): Da die Norm auf dem positiven Kegel streng monoton (d.h.: $0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| < \|y\|$) und T eine Kontraktion ist, folgt aus $|f| = |Tf| \leq T|f|$: $T|f| = |f|$. Die Behauptung folgt nun aus 1.33.

(b) : Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\|f\|_p = 1$ und damit $\|\check{f}\|_q = 1$. Es gilt dann $\langle f, \lambda T'f\rangle = \langle f, \check{f}\rangle = \|f\|_p$. Da die p-Norm strikt konvex ist und $\|\lambda T'\check{f}\|_q \leq \|\check{f}\|_q = 1$ gilt, folgt $\lambda T'\check{f} = \check{f}$. Die Behauptung folgt nun aus (a) .

(c) Aus (a) folgt $T|f| = |f|$ und damit ist $\{|f|\}^{\perp\perp} = \overline{E_{|f|}}$ $(E := L^p(\mu))$ T-invariant. Ebenso folgt aus (b), daß $\{|\check{f}|\}^{\perp\perp} \subseteq L^q(\mu)$ T'-invariant ist. Damit ist $\{|f|\}^{\perp} = (\{|\check{f}|\}^{\perp\perp})^{\circ}$ T-invariant.

3.7 THEOREM Es sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe positiver Kontraktionen auf $L^p(\mu)$. Ist $i\alpha \in P\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, dann gibt es isometrische Verbandshomomorphismen i , j , so daß die folgenden Diagramme für alle $t \geq 0$ kommutieren. Außerdem gilt $j' \cdot i = \mathrm{Id}$. $(\tau = \frac{2\pi}{\alpha})$

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Gamma) & \xrightarrow{\ i\ } & L^p(\mu) \\ {\scriptstyle R_\tau(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(t)} \\ L^p(\Gamma) & \xrightarrow[\ i\ ]{} & L^p(\mu) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^q(\Gamma) & \xrightarrow{\ i\ } & L^q(\mu) \\ {\scriptstyle R_\tau(t)'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(t)} \\ L^q(\Gamma) & \xrightarrow[\ j\ ]{} & L^q(\mu) \end{array}$$

Wir wollen zunächst die Behauptung des Satzes erläutern. Die Halbgruppe $\{R_\tau(t)'\}$ ist ebenfalls eine Rotationshalbgruppe auf Γ . Das Theorem besagt nun: $E = L^p(\mu)$ enthält $L^p(\Gamma)$ als abgeschlossenen, $\{T(t)\}$-invarianten Unterverband, E' enthält in gleicher Weise

$L^q(\Gamma)$. Die Einschränkungen von $\{T(t)\}$ bzw. $\{T(t)'\}$ sind jeweils die Rotationshalbgruppen. Die Bedingung $j' \cdot i = Id$ bedeutet, daß die Teilräume $L^p(\Gamma) \subseteq E$ und $L^q(\Gamma) \subseteq E'$ in kanonischer Dualität zueinander stehen. Das heißt, für $f \in L^p(\Gamma) \subseteq L^p(\mu)$, $g \in L^q(\Gamma) \subseteq L^q(\mu)$ gilt : $\int_X f(s)g(s)\,d\mu(s) = \int_\Gamma f(s)g(s)\,dm(s)$.

Beweis von 3.7 : Nach Voraussetzung gilt $Af = i\alpha f$ für ein $f \neq 0$. Da hieraus $A\bar{f} = -i\alpha\bar{f}$ folgt, können wir o.B.d.A. $\alpha > 0$ annehmen. Zunächst beweisen wir die Behauptung unter folgender Voraussetzung:

(*) $\mu(X) = 1$ und $|f| = e$ (d.h.: $|f(s)| = 1$ für alle $s \in X$)

Nach 3.6(a) gilt $T(t)e = e$ $(t \geq 0)$. Damit ist das Hauptideal $E_e = L^\infty(\mu)$ invariant unter allen Operatoren $T(t)$ $(t \geq 0)$. $L^\infty(\mu)$ ist zu einem Raum $C(K)$ (K kompakt) isomorph. Die Halbgruppe $\{T(t)\}$ induziert auf $C(K)$ ein (nicht notwendig stark stetige) Halbgruppe $\{\tilde{T}(t)\}$ von Markoffoperatoren. Bezeichnet man die f entsprechende, stetige Funktion auf K mit $\tilde{f}$ und das μ entsprechende Radonmaß auf K mit $\tilde{\mu}$, so gilt:

(1) $\tilde{T}(t)\tilde{f}^k = e^{ik\alpha t}\tilde{f}^k$ $\quad (k \in \mathbb{Z},\ t \geq 0)$;

(2) $\tilde{T}(t)'\tilde{\mu} = \tilde{\mu}$ $\quad (t \geq 0)$;

(3) $\langle \tilde{f}^k, \tilde{\mu} \rangle = 0$, falls $k \neq 0$ und $\langle \tilde{f}^0, \tilde{\mu} \rangle = \langle e, \tilde{\mu} \rangle = 1$;

(4) $\tilde{f}(K) = \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Die ersten beiden Behauptungen folgen aus dem Lemma, die

dritte ergibt sich aus folgender Gleichung:
$\langle \tilde{f}^k, \hat{\mu} \rangle = \langle \tilde{f}^k, \tilde{T}(t)'\tilde{\mu} \rangle = \langle \tilde{T}(t)\tilde{f}^k, \tilde{\mu} \rangle = e^{ik\alpha t}\langle \tilde{f}^k, \tilde{\mu} \rangle$.
Nun zur Bedingung (4). Wegen $|f| = e$ gilt jedenfalls $\tilde{f}(K) \subseteq \Gamma$. Ist $\tilde{f}(K) \subsetneq \Gamma$, dann gibt es eine Folge von Polynomen (p_n) , so daß $p_n(z)$ gleichmäßig in $z \in \tilde{f}(K)$ gegen $\frac{1}{z}$ konvergiert. Es folgt, daß, $(p_n \circ \tilde{f})$ gleichmäßig auf K gegen $\tilde{f}^{-1}$ konvergiert, also $\lim \tilde{f}(p_n \circ \tilde{f}) = e$. Jedes $\tilde{f}(p_n \circ \tilde{f})$ ist eine Linearkombination der Funktionen $\{\tilde{f}^k : k \geq 1\}$. Damit gilt $\langle \tilde{f}(p_n \circ \tilde{f}), \tilde{\mu} \rangle = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, während $\lim \langle \tilde{f}(p_n \circ \tilde{f}), \tilde{\mu} \rangle = \langle e, \tilde{\mu} \rangle = 1$. Damit ist die vierte Bedingung bewiesen.

Die stetige surjektive Funktion $\tilde{f} : K \longrightarrow \Gamma$ induziert einen isometrischen Verbands- und Algebrenisomorphismus $\varphi : C(\Gamma) \longrightarrow C(K)$, $h \longmapsto h \circ \tilde{f}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\varphi(z^k) = \tilde{f}^k$ und falls $k \neq 0$, $\langle z^k, \varphi'(\tilde{\mu}) \rangle = 0$ sowie $\langle e, \varphi'(\tilde{\mu}) \rangle = 1$. Dies zeigt, daß $\varphi'(\tilde{\mu})$ das Haarsche Maß m auf Γ ist.
Ist $h \in C(\Gamma)$ und $1 \leq r < \infty$, so gilt:
$\|\varphi(h)\|^r_{L^r(\tilde{\mu})} = \int |h \circ \tilde{f}|^r \, d\tilde{\mu} = \int |h|^r \circ f \, d\tilde{\mu} = \int |h|^r \, d(\varphi'(\tilde{\mu})) = \|h\|^r_{L^r(\Gamma)}$
Die stetigen Fortsetzungen von φ auf $L^p(\Gamma)$ bzw. auf $L^q(\Gamma)$ liefern die gewünschten isometrischen Verbandshomomorphismen $i : L^p(\Gamma) \longrightarrow L^p(\tilde{\mu}) = L^p(\mu)$ und $j : L^q(\Gamma) \longrightarrow L^q(\tilde{\mu}) = L^q(\mu)$.
Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $i(z^k) = f^{(k)} \in L^p(\mu)$ und $j(z^k) = \tilde{f}^{(-k)} \in L^q(\mu)$. Daraus folgt mit Hilfe von 3.6(a), (b): $(\tau = \frac{2\pi}{\alpha})$
$T(t) \circ i(z^k) = T(t) f^{(k)} = e^{ik\alpha t} f^{(k)} = i \circ R_\tau(t)(z^k)$

$T(t)' \cdot j(z^k) = T(t)' \overset{\vee}{f}(-k) = e^{-ik\alpha t} \overset{\vee}{f}(-k) = j \cdot R_\tau(t)'(z^k)$.

Da die Menge $\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ sowohl in $L^p(\Gamma)$ als auch in $L^q(\Gamma)$ total ist, folgt $T(t) \cdot i = i \cdot R_\tau(t)$ und $T(t)' \cdot j = j \cdot R_\tau(t)'$, das heißt, die angegebenen Diagramme kommutieren.

Schließlich gilt für $k, m \in \mathbb{Z}$ wegen Bedingung (3): $\langle i(z^k), j(z^m) \rangle = \langle f^{(k+m)}, \mu \rangle = \langle z^k, z^m \rangle$ und man erhält $j' \cdot i = \mathrm{Id}$. Damit ist der Satz unter der Voraussetzung (*) bewiesen.

Den allgemeinen Fall kann man wie folgt darauf zurückführen: Wegen 3.6(c) reduziert die zu $\{|f|\}^{\perp\perp}$ gehörige Bandprojektion die Halbgruppe. Deshalb kann man sich auf den Fall $|f| \gg 0$, das heißt, $|f(s)| > 0$ für alle $s \in X$, beschränken, darüberhinaus können wir $\|f\|_p = 1$ annehmen. Ist $\hat{\mu}$ das Maß auf (X, Σ), welches bezüglich μ die Dichte $|f|^p$ hat, dann gilt $\hat{\mu} \geq 0$, $\hat{\mu}(X) = 1$. Für $1 \leq r < \infty$ ist $i_r : L^r(\hat{\mu}) \longrightarrow L^r(\mu)$, $h \longmapsto h|f|^{\frac{p}{r}}$ ein isometrischer Verbandsisomorphismus, und falls $r^{-1} + s^{-1} = 1$, so gilt $i_r' = i_s$. Setzt man $\hat{T}(t) := i_p^{-1} \cdot T(t) \cdot i_p$, dann ist $\{\hat{T}(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $L^p(\hat{\mu})$ und für $\hat{f} := \frac{f}{|f|}$ gilt: $\hat{T}(t)\hat{f} = i_p^{-1} T(t)\, i_p \hat{f} = i_p^{-1} T(t) f = e^{i\alpha t} i_p^{-1} f = e^{i\alpha t} \hat{f}$. Damit erfüllen $\hat{T}(t)$, $\hat{\mu}$, $\hat{f}$ die Voraussetzung (*). Sind $\hat{i}$ und $\hat{j}$ die oben konstruierten Verbandshomomorphismen, dann leisten $i := i_p \cdot \hat{i}$ und $j := i_q \cdot \hat{j}$ das Gewünschte.

Nachdem der Satz bewiesen ist, wollen wir noch zwei Bemerkungen machen. Die erste betrifft den Fall " $p = 1$ ", die zweite das diskrete Analogon (vgl. [37]).

Um zu sehen, was für " $p = 1$ " richtig ist, muß man zunächst einen Blick auf das Lemma 3.6 werfen. Dabei erkennt man, daß die Aussage (a) auch für $p = 1$ richtig ist, (b) und (c) allerdings falsch sind (z.B. $E = \mathbb{C}^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$). Dies hat zur Folge, daß man zwar i, aber nicht mehr j konstruieren kann. Damit enthält $L^1(\mu)$ den Banachverband $L^1(\Gamma)$ als $\{T(t)\}$-invarianten abgeschlossenen Unterverband, und $\{T(t)\}_{|L^1(\Gamma)}$ ist die Rotationshalbgruppe.

Wie schon oben erwähnt, handelt es sich bei Theorem 3.7 um das Analogon des folgenden Resultates von H.H.Schaefer:

> Theorem Ist T eine positive Kontraktion auf $L^p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T und $|\lambda| = 1$, dann gilt:
> Ist λ eine n-te primitive Einheitswurzel $(n \in \mathbb{N})$, dann enthalten $L^p(\mu)$ und $L^q(\mu)$ den Banachverband $\mathbb{C}^n$ als T- bzw. T'-invarianten Unterverband und $T_{|\mathbb{C}^n}$ sowie $T'_{|\mathbb{C}^n}$ sind irreduzible Permutationen (d.h.: Rotationen auf der zyklischen Gruppe der Ordnung n).

Mit den oben verwendeten Beweismethoden kann man dieses

Resultat wie folgt ergänzen:

Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $\lambda^n \neq 1$, dann enthalten $L^p(\mu)$ und $L^q(\mu)$ die Banachverbände $L^p(\Gamma)$ bzw. $L^q(\Gamma)$ als T- bzw. T'-invariante Unterverbände und $T|L^p(\Gamma)$ sowie $T'|L^q(\Gamma)$ sind irreduzible Rotationen auf der Kreisgruppe.

4. ZUR ASYMPTOTIK POSITIVER HALBGRUPPEN

Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens stark stetiger Halbgruppen kann man auf verschiedene Arten angehen. Zum einen besteht die Möglichkeit, die Konvergenz der Cèsaro-Mittel $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,ds$ für $t \longrightarrow \infty$ oder die Konvergenz der Abel-Mittel $\mu R(\mu, A)$ für $\mu \longrightarrow 0$ zu betrachten. Für beschränkte Halbgruppen sind diese Konvergenzbegriffe äquivalent [23],[24] und durch spektraltheoretische Eigenschaften charakterisiert [27 , p.20 - 33] . Andererseits kann man untersuchen, ob die Halbgruppe konvergiert, das heißt, ob $\lim_{t\to\infty} T(t)$ in einer der Standardtopologien existiert.

In der Operatornorm existiert dieser Limes dann und nur dann, wenn es eine reduzierende Projektion P gibt, so daß $\{T(t)\}_{|PG}$ trivial und $\{T(t)\}_{|\ker P}$ vom Typ $\omega_0 < 0$ ist. Untersucht man die punktweise Konvergenz, dann gilt für beschränkte, positive Halbgruppen folgendes Resultat:

> Ist 0 nicht im Spektrum (also $s(A) < 0$), dann konvergiert die Halbgruppe punktweise gegen Null [27 , p.36].

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns ebenfalls mit der punktweisen Konvergenz positiver Halbgruppen und zwar unter der Voraussetzung, daß 0 ein Eigenwert der Halbgruppe ist.

Im Mittelpunkt steht ein 0 - 2 Gesetz für irreduzible Halbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger

Norm (4.4): Liegt neben 0 kein weiterer Eigenwert im Randspektrum und ist u ein positiver Fixpunkt der Halbgruppe, dann gilt für $\tau > 0$ entweder $\lim_{t\to\infty} |T(t+\tau) - T(t)|u = 2u$ oder $\lim_{t\to\infty} |T(t+\tau) - T(t)|u = 0$. Damit kann man die punktweise Konvergenz solcher Halbgruppen spektraltheoretisch charakterisieren, sofern diese nicht aus paarweise orthogonalen Operatoren bestehen (4.5). Daneben wird das asymptotische Verhalten derjenigen irreduziblen Halbgruppen betrachtet, deren Spektralschranke ein Pol der Resolvente ist. Dabei sind die Fälle $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \{0\}$ und $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ zu unterscheiden. Sie werden in 4.2 bzw. in 4.6 behandelt.

Das erste Resultat hat für dieses Kapitel die Funktion eines Hilfssatzes. Da es selbst von Interesse ist, soll etwas näher darauf eingegangen werden.
Nach 1.23(b) ist der Fixraum einer Halbgruppe $\{T(t)\}$ identisch mit dem Kern des Generators A.
Unter dem dualen Fixraum verstehen wir die Menge der $\{T(t)\}$-invarianten Linearformen, wir bezeichnen ihn mit $\ker A'$. Allgemeiner definieren wir für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$: $\ker(\lambda - A') := \{x' \in E' : T(t)'x' = e^{\lambda t} x' \text{ für alle } t \geq 0\}$.
Man sieht leicht, daß diese Menge mit dem Kern des zu $(\lambda - A)$ adjungierten Operators übereinstimmt, das heißt mit der Menge $\{x' \in E' : \text{für alle } x \in D(A) \text{ gilt } \langle\langle(\lambda - A)x, x'\rangle = 0\}$.
Bekanntlich ist die Mittelergodizität beschränkter Halb-

gruppen (d.h., die starke Konvergenz der Césaro-Mittel) dadurch charakterisiert, daß der Fixraum $\ker A$ den dualen Fixraum $\ker A'$ trennt [27]. Die stärkere Bedingung, daß jeder Operator der Halbgruppe mittelergodisch ist, wird im folgenden Satz beschrieben.

4.1 PROPOSITION Für eine beschränkte, stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf einem Banachraum G sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jeder Operator $T(s)$ $(s > 0)$ ist mittelergodisch.

(b) $\ker(i\alpha - A)$ trennt $\ker(i\alpha - A')$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z' \in \ker(i\alpha - A')$, $z' \neq 0$. Für $\tau := \frac{2\pi}{\alpha}$ gilt dann $T(\tau)'z' = z'$ und da $T(\tau)$ mittelergodisch ist, existiert ein $z_0 \in G$ mit $T(\tau)z_0 = z_0$ und $\langle z_0, z' \rangle \neq 0$ [25, Thm.1.7].
Setzt man $z := \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-i\alpha t} T(t)z_0 \, dt$, dann gilt $Az = i\alpha z$ und $\langle z, z' \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-i\alpha t}\langle T(t)z_0, z' \rangle \, dt =$
$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle z_0, e^{-i\alpha t} T(t)'z' \rangle \, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle z_0, z' \rangle \, dt = \langle z_0, z' \rangle \neq 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Es sei $s > 0$. Zu zeigen ist, daß der Fixraum von $T(s)$ den Fixraum von $T(s)'$ trennt [25, Thm.1.7]. Ist $z' \in G'$, $T(s)'z' = z'$ und $z' \neq 0$, dann gibt es ein $y \in G$, so daß $\langle y, z' \rangle \neq 0$. Damit ist einer der Fourierkoeffizienten der periodischen Funktion $t \longrightarrow \langle T(t)y, z' \rangle$ ungleich 0, etwa $\frac{1}{s}\int_0^s e^{i\beta t}\langle T(t)y, z' \rangle \, dt \neq 0$, wobei $\beta = k\frac{2\pi}{s}$ für geeignetes

$k \in \mathbb{Z}$. Definiert man nun die Linearform $z_o' \in G'$ wie folgt : $\langle x, z_o' \rangle := \frac{1}{s} \int_o^s e^{-i\beta t} \langle T(t)x, z' \rangle dt \quad (x \in G)$, dann ist $z_o' \in \ker(i\beta - A')$ und $\langle y, z_o' \rangle = \langle y, z' \rangle \neq 0$, insbesondere $z_o' \neq 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $z \in \ker(i\beta - A) \subseteq \ker(1 - T(s))$ mit $\langle z, z_o' \rangle \neq 0$, und aus $\langle z, z_o' \rangle = \frac{1}{s} \int_o^s e^{-i\beta t} \langle T(t)z, z' \rangle dt = \frac{1}{s} \int_o^s e^{-i\beta t} \langle e^{i\beta t} z, z' \rangle dt =$ $= \langle z, z' \rangle$ folgt $\langle z, z' \rangle \neq 0$.

Die Bedingung (ii) des Satzes ist erfüllt, wenn jeder Punkt des Randspektrums ein Pol erster Ordnung der Resolvente ist. Für beschränkte positive Halbgruppen ist dies bereits dann erfüllt, wenn 0 ein Pol mit endlichdimensionalem Residuum ist. Denn nach 2.12 besteht das Randspektrum in diesem Fall ausschließlich aus Polen der Resolvente, und aus der Beschränktheit und 2.2(a) folgt, daß dies Pole erster Ordnung sind. Dieser Sachverhalt liegt dem folgenden Satz zugrunde. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, daß neben 0 noch weitere Eigenwerte im Randspektrum liegen. Der Fall " $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ " wird in Prop.4.6 behandelt.

4.2 PROPOSITION Es sei E ein Banachverband, $\{T(t)\}$ eine irreduzible, beschränkte, positive Halbgruppe auf E und $s(A) = 0$ sei ein Pol der Resolvente. Liegen im Randspektrum von Null verschiedene Spektralwerte, dann gibt es eine strikt positive Projektion P,

die die Halbgruppe reduziert, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\{T(t)\}_{|PE}$ ist irreduzibel und periodisch.

(b) Die Spektralschranke von $\{T(t)\}_{|\ker P}$ ist echt kleiner als 0 .

Wir wollen zunächst zwei Anmerkungen machen. Die strikte Positivität von P impliziert, daß PE ein Unterverband von E ist. Der Fixraum der Einschränkung auf PE ist eindimensional. Damit ist $\{T(t)\}_{|PE}$ im wesentlichen eine Rotation auf Γ (2.14) .

Für positive Halbgruppen folgt aus $s(A) < 0$ die starke Konvergenz der Halbgruppe gegen 0 [27] . Ob dies für beliebige beschränkte Halbgruppen gilt, ist offen. Eine positive Antwort auf diese Frage impliziert, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die Halbgruppe $\{T(t)\}$ gegen die periodische Halbgruppe $\{T_0(t)\} := \{T(t)\}_{|PE}$ konvergiert, das heißt, $\lim_{t\to\infty} T(t)x - T_0(t)x = 0$ für alle $x \in E$. Man könnte auch sagen, für große Zeiten wirkt die Halbgruppe ähnlich wie eine periodische Halbgruppe.

Beweis von 4.2 : Nach Theorem 3.4 ist 0 ein einfacher Eigenwert der Halbgruppe. Aus Theorem 2.12 folgt dann $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = i\alpha\mathbb{Z}$ für ein $\alpha > 0$, und jeder Punkt $ik\alpha$ $(k \in \mathbb{Z})$ ist ein Pol erster Ordnung mit geometrischer Vielfachheit 1 . Aus 3.4 folgt $(\sigma(A) \cap i\mathbb{R}) + i\alpha\mathbb{Z} = \sigma(A)$

und dies hat zur Folge, daß es ein $\gamma < 0$ gibt mit $\sigma(A) \setminus i\alpha\mathbb{Z} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leq \gamma\}$. (Andernfalls gebe es eine Folge $(\lambda_n) \subseteq \sigma(A) \setminus i\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Im}\,\lambda_n \in [0,\alpha]$ und $\lim \mathrm{Re}\,\lambda_n = 0$, ein Widerspruch, da jedes $\lambda \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ isoliert liegt.) Setzt man $s := \frac{2\pi}{\alpha}$, dann ist der Operator $T(s)$ nach 4.1 mittelergodisch und damit ist $\ker(1 - T(s))$ das Bild einer positiven Projektion P . Diese vertauscht mit jedem Operator der Halbgruppe und ist strikt positiv, da das abgeschlossene Ideal $\{x \in E : P|x| = 0\}$ $\{T(t)\}$-invariant ist. PE ist ein Unterverband [S , III.11.5] und $\{T(t)\}_{|PE}$ ist periodisch. Die Irreduzibilität dieser Einschränkung folgt aus 2.14 und da die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $ik\alpha$ $(k \in \mathbb{Z})$ in $PE = \ker(1 - T(s))$ liegen, gilt für das Spektrum $\sigma(A_o)$ von $\{T(t)\}_{|\ker P}$: $\sigma(A_o) \subseteq \sigma(A) \setminus i\alpha\mathbb{Z} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leq \gamma\}$.

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Resultat dieses Abschnittes. Sein diskretes Analogon geht auf D . Ornstein und L . Sucheston zurück [32]. Sie bewiesen ein "Null-Zwei" Gesetz für solche Operatoren auf L^1-Räumen, die von Markoffschen Kernen auf separablen Maßalgebren induziert werden. S . R . Foguel verallgemeinerte dieses Resultat und gab einen einfacheren Beweis an [10] . Die Konsequenzen dieses Ergebnisses für die Theorie der positiven Operatoren auf Banachverbänden sind von D . Axmann untersucht worden [1] .

Bevor wir ein " Null-Zwei " Gesetz für kontinuierliche Halbgruppen formulieren, sind einige Erläuterungen nötig. Ist E ein ordnungsvollständiger Banachverband, dann ist $\mathcal{L}^r(E)$, das ist die lineare Hülle der positiven Operatoren auf E, ein komplexer Vektorverband. $\mathcal{L}^r(E)$ heißt Raum der regulären Operatoren und ist eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$. Für $S, T \in \mathcal{L}^r(E)$ gilt $|S \cdot T| \leq |S| \cdot |T|$. Darüberhinaus gilt wie in jedem Vektorverband $S \wedge T = \frac{1}{2}(S + T - |S - T|)$, falls S und T reell sind. Insbesondere sind für positive Operatoren S, T die Bedingungen "$S \wedge T = 0$" und "$|S - T| = S + T$" äquivalent.

Im folgenden Lemma wird die Stirlingsche Formel

" $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \exp\frac{\theta}{12n}$ mit $\theta \in [0,1]$ " verwendet (vgl.: S.Lang : A First Course in Calculus. Reading 1968).

4.3 LEMMA Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{-m} \sum_{k=0}^{m+1} \left| \binom{m}{k} - \binom{m}{k-1} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{m}} \qquad \left(\binom{m}{-1} = \binom{m}{m+1} = 0 \right).$$

Beweis: Setzt man $\sum_m := 2^{-m} \sum_{0}^{m+1} \left| \binom{m}{k} - \binom{m}{k-1} \right|$, dann gilt für $m = 2s - 1$ $(s \in \mathbb{N})$: $\sum_m = \sum_{m+1} = 2\,((2s)!) \cdot [2^{2s}(s!)^2]^{-1}$.

Schätzt man dies mit der Stirlingschen Formel ab, erhält man $\sum_m = \sum_{m+1} \leq \frac{2}{\sqrt{2s}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(\frac{1}{24}) \leq \frac{2}{\sqrt{2s}} = \frac{2}{\sqrt{m+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{m}}$.

4.4 THEOREM Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, $\{T(t)\}$ eine beschränkte, positive, irreduzible Halbgruppe auf E, und es gelte $P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Dann existiert ein quasiinnerer Fixpunkt $u \in E_+$, und für jedes $\tau > 0$ gilt genau eine der folgenden Aussagen: (a) $|T(t+\tau) - T(t)|u = 2u$ für alle $t \geq 0$.

(b) $\lim_{t\to\infty} |T(t+\tau) - T(t)|u = 0$.

Beweis: Wir zeigen zunächst folgendes:

(1) Es gibt eine strikt positive, $\{T(t)\}$-invariante Linearform φ und einen quasiinneren Fixpunkt u.

(2) Ist $x \in E$, $t > 0$ und gilt $T(t)x \geq x$ oder $T(t)x \leq x$, dann folgt $x = \gamma u$ für ein $\gamma \in \mathbb{C}$.

Nach Voraussetzung existiert ein $y \in E$, $y \neq 0$, so daß $\lambda R(\lambda, A)y = y$ $(\operatorname{Re}\lambda > 0)$. Wählt man ein $\psi \in E'_+$ mit $\langle y, \psi\rangle \neq 0$ und einen gegen 0 konvergenten Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $(0,1)$, dann existiert $\varphi := \lim_{\mu\in\mathcal{U}} \mu R(\mu, A)'\psi$ (2.9(c)). φ ist eine positive, $\{T(t)\}$-invariante Linearform und wegen $\langle y, \varphi\rangle = \langle y, \psi\rangle \neq 0$ gilt $\varphi \neq 0$. Aus der Irreduzibilität folgt nun, daß φ strikt positiv ist.
Aus $|y| = |T(t)y| \leq T(t)|y|$ und $\langle T(t)|y| - |y|, \varphi\rangle = 0$ folgt dann, daß $u := |y|$ ein Fixpunkt ist und aufgrund der Irreduzibilität ist dies ein quasiinnerer Punkt.

Wir kommen nun zur Bedingung (2). Das Ordnungsintervall $[-u,u]$ ist schwachkompakt [S, II.5.10] und total. Aus $T(t)u = u$ folgt dann, daß jeder Operator $T(t)$ mittelergodisch ist. Wegen der Irreduzibilität der Halbgruppe gilt $\ker A = \langle u\rangle := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Aus der Voraussetzung "$P\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$" und 1.23(b) folgt dann

$\ker(1 - T(t)) = \langle u \rangle$ für alle $t > 0$. Damit ist $P := \varphi \otimes u$ die mittelergodische Projektion jedes Operators $T(t)$ (o.B.d.A. sei $\langle u, \varphi \rangle = 1$).
Ist nun $x \in E$, $t > 0$ und gilt $T(t)x \leq x$, dann folgt $P(x - T(t)x) = 0$, was wegen der strikten Positivität von φ $x = T(t)x$ nach sich zieht. Hieraus folgt nun $x = Px = \langle x, \varphi \rangle u$.

Wir kommen nun zum Beweis der Alternative. Dazu setzen wir $S_t := T(t+\tau) \wedge T(t)$; dann gilt für alle $s, t \geq 0$: $\frac{1}{2} S_t \cdot (Id + T(s)) = \frac{1}{2}(S_t + S_t T(s)) \leq \frac{1}{2}(T(t+\tau) + T(t)T(s))$, insbesondere:

(3) $\quad \frac{1}{2} S_t (Id + T(\tau)) \leq T(t+\tau)$ für alle $t \geq 0$.

Aus $S_t \cdot T(s) \leq S_{t+s}$ folgt, daß das Netz $(S_t u)_{t \geq 0}$ monoton wachsend ist. Aus der Beziehung $S_t = \frac{1}{2}(T(t+\tau) + T(t) - |T(t+\tau) - T(t)|)$ folgt $S_t u = u - \frac{1}{2}|T(t+\tau) - T(t)|u$ und deshalb genügt es folgendes zu zeigen:

> Ist $S_t u \not\to 0$ für ein $t > 0$, dann gilt:
> Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r > 0$ und einen positiven Operator $U \in \mathcal{L}(E)$ mit $\lim_{j \to \infty} U^j u = 0$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$: $|T(jr+\tau) - T(jr)|u \leq \frac{2}{\sqrt{m}} u + 2U^j u$

Das monoton wachsende Netz $(S_t u)$ ist durch u beschränkt, deshalb existiert $v := \lim_{t \to \infty} S_t u$. Nach Voraussetzung ist $v \not\to 0$ und aus $T(s)S_t \leq S_{s+t}$ $(t > 0)$, folgt $T(s)v \leq v$. Wegen (2) gilt dann $v = \gamma u$ für ein $\gamma > 0$.

Ist t_1 so gewählt, daß $S_{t_1}u \gneq 0$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} S_{t_1}S_t u = \gamma S_{t_1}u \neq 0$ und es gibt ein $t_2 > 0$, so daß $S_{t_1}S_{t_2}u \gneq 0$. Wiederholt man dieses Verfahren, dann erhält man eine Folge reeller Zahlen (t_k), so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ $S_{t_1}\cdot S_{t_2}\cdot \ldots \cdot S_{t_k}u \gneq 0$.
Ist nun $m \in \mathbb{N}$ gegeben, dann setzen wir

$$r := t_1 + t_2 + \ldots + t_m + m\tau \quad , \quad S := S_{t_1}\cdot S_{t_2}\cdot \ldots \cdot S_{t_m} \quad ,$$
$$U := T(r) - S\cdot 2^{-m}(\mathrm{Id} + T(\tau))^m \; .$$

Es gilt $r > 0$, $U \leq T(r)$ und aus (3) folgt $U \geq 0$. Wegen $0 \leq Uu \leq T(r)u = u$ ist die Folge $(U^j u)$ monoton fallend, also existiert $w := \lim U^j u$. Es gilt $Uw = w$ und aus $0 \leq w = Uw \leq T(r)w$ folgt $w = \beta u$. Wäre $\beta \neq 0$, also $Uu = u$, so würde aus der Definition von U $Su = 0$ folgen, ein Widerspruch zur Definition von S.

Nun muß noch die Abschätzung bewiesen werden.
Für $j \in \mathbb{N}$ gilt $T(rj) = T(r)^j = (S\cdot 2^{-m}(\mathrm{Id} + T(\tau))^m + U)^j =$
$= R_j\, 2^{-m}(\mathrm{Id} + T(\tau))^m + U^j = R_j\, 2^{-m}\sum_0^m \binom{m}{k} T(\tau k) + U^j$, wobei R_j ein geeigneter positiver Operator ist. Setzt man in diese Gleichung u ein, so folgt $R_j u \leq u$.
Es folgt $T(rj)(T(\tau) - \mathrm{Id}) = R_j\, 2^{-m}\sum_0^m \binom{m}{k} T((k+1)\tau) -$
$- R_j\, 2^{-m}\sum_0^m \binom{m}{k} T(k\tau) + U^j(T(\tau) - \mathrm{Id}) =$
$= R_j\, 2^{-m}\sum_0^{m+1} \left[\binom{m}{k} - \binom{m}{k-1}\right] T(k\tau) + U^j(T(\tau) - \mathrm{Id})$
und man erhält:
$$|T(rj+\tau) - T(rj)| \leq R_j\, 2^{-m}\sum_0^{m+1} \left|\binom{m}{k} - \binom{m}{k-1}\right| T(k\tau) + U^j(T(\tau) + \mathrm{Id}).$$
Aus $R_j u \leq u$ und $T(t)u = u$ folgt dann
$|T(rj+\tau) - T(rj)|u \leq 2^{-m}\sum_0^{m+1} \left|\binom{m}{k} - \binom{m}{k-1}\right| u + 2U^j u$, und die gewünschte Abschätzung ergibt sich aus dem Lemma.

Für die Konvergenz positiver Halbgruppen mit $s(A) = 0$ ist es notwendig, daß außer 0 keine Eigenwerte im Randspektrum liegen. (Andernfalls gibt es $x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ mit $T(t)x = e^{i\alpha t} x$.) Das folgende Korollar zeigt, daß diese Bedingung für gewisse irreduzible Halbgruppen auf Banachverbänden mit ordnungsstetiger Norm auch hinreichend ist.

4.5 KOROLLAR $\{T(t)\}$ sei eine beschränkte, positive, irreduzible Halbgruppe auf einem Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und besitze einen von Null verschiedenen Fixpunkt. Gibt es reelle Zahlen $s, t > 0$, $s \neq t$, so daß $T(t) \wedge T(s) \neq 0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent: (a) $\lim_{t \to \infty} T(t)x$ existiert für alle x.
(b) Neben 0 gibt es keine weiteren Eigenwerte im Randspektrum.

Beweis: Es ist nur die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen. Wie wir im Beweis des Theorems sahen, ist jeder Operator $T(t)$ mittelergodisch und es gilt $\ker(1 - T(t)) = \langle u \rangle$, für einen quasiinneren Fixpunkt $u \in E_+$. Hieraus folgt $E = \langle u \rangle \oplus \overline{\operatorname{im}(1 - T(t))}$.
Nach Voraussetzung existieren $t > 0$, $\tau > 0$, so daß $T(t + \tau) \wedge T(t) \neq 0$. Da u ein quasiinnerer Punkt ist, folgt $(T(t + \tau) \wedge T(t))u \neq 0$ und damit ist Fall (a) des Theorems ausgeschlossen.
Ist $x \in E_u$, $|x| \leq nu$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt

$|T(t)(Id - T(\tau))x| \leq n|T(t+\tau) - T(t)|u$, und aus 4.4(b) folgt $T(t)y \longrightarrow 0$ für alle $y \in (Id - T(\tau))E_u$. Da E_u in E dicht liegt, gilt gleiches für $(Id - T(\tau))E_u$ bzgl. $(Id - T(\tau))E$. Aus [35, III.4.5] folgt dann, daß $(T(t)y)$ für alle $y \in \overline{(Id - T(\tau))E}$ gegen 0 konvergiert. Da $\{T(t)\}_{|\ker(Id - T(\tau))}$ trivial ist, folgt die Konvergenz der Halbgruppe für alle $x \in E$.

Zum Abschluß wollen wir noch einmal auf die irreduziblen Halbgruppen zu sprechen kommen, deren Spektralschranke ein Pol der Resolvente ist. In 4.2 wurde der Fall behandelt, daß es von Null verschiedene Eigenwerte im Randspektrum gibt. Über den anderen Fall kann man nun folgendes sagen:

4.6 PROPOSITION Es sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, $\{T(t)\}$ eine beschränkte, positive, irreduzible Halbgruppe auf E und $s(A) = 0$ sei ein Pol der Resolvente.
Ist 0 der einzige Eigenwert im Randspektrum und gilt für zwei verschiedene Zahlen $s, t \geq 0$ $T(s) \wedge T(t) \neq 0$, dann konvergiert die Halbgruppe stark gegen eine strikt positive Projektion vom Rang 1.

LITERATURVERZEICHNIS

1) D. Axmann
Struktur- und Ergodentheorie irreduzibler Operatoren auf Banachverbänden. Dissertation, Tübingen 1980 .

2) N. Bourbaki
Théories Spectrales , Chap. 1 et 2 .
Paris : Herman 1967 .

3) R. Derndinger
Über das Spektrum positiver Operatoren.
Dissertation , Tübingen 1979 .

4) R. Derndinger und R. Nagel
Der Generator stark stetiger Verbandshalbgruppen auf C(X) und dessen Spektrum.
Math. Ann. 245 , 159 - 177 , 1979 .

5) N. Dunford und J. T. Schwartz
Linear Operators , Part I .
New York : Wiley 1958 .

6) E. B. Dynkin
Markoff processes and semi-groups of operators .
Teorya Veroyatnoost. i Primenen 1 , 25 - 37 , 1956 .

7) D. E. Evans
On the Spectrum of a One-Parameter Strongly Continuous Representation .
Math. Scand. 39 , 80 - 82 , 1976 .

8) W. Feller
The parabolic differential equation and the associated semigroups of transformations .
Ann. Math. 55 , 468 - 519 , 1952 .

9) W. Feller
Diffusion Processes in One Dimension .
Trans. Amer. Math. Soc. 77 , 1 - 31 , 1954 .

10) S. R. Foguel
More on the "Zero - Two" Law .
Proc. Amer. Math. Soc. 61 , 262 - 264 , 1976 .

11) A. Friedman
Partial Differential Equations .
New York : Holt 1969 .

12) G. Greiner , J. Voigt und M. Wolff
On the Spectral Bound of the Generator of Semigroups of Positive Operators .
Erscheint demnächst .

13) J. Hadamard
Le principe de Huygens
Bull. Soc. Math. France 52 , 610 - 638 , 1924 .

14) J. Hejtmanek
Scattering Theory of the Linear Boltzmann Operator .
Comm. Math. Phys. 43 , 109 - 120 , 1975 .

15) H. Heyer
Einführung in die Theorie Markoffscher Prozesse .
Mannheim : Bibliographisches Institut 1979 .

16) E. Hille
Functional Analysis and Semi-Groups .
Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. vol. 31 New York 1948 .

17) E. Hille und R. S. Phillips
Functional Analysis and Semi-Groups .
Providence , R. I. 1957 .

18) G. Hunt
Markov Processes and Potentials I , II , III .
Illinois J. Math. 1 , 44 - 93 ,1957 / 1 , 316 - 369 ,
1957 / 2 , 151 - 213 , 1958 .

19) K. Jörgens
An Asymptotic Expansion in the Theory of
Neutron Transport .
Comm. Pure Appl. Math. 11 , 219 - 242 , 1958 .

20) S. Karlin
Positive Operators .
J. Math. Mech. 8 , 907 - 937 , 1959 .

21) J. Lamperti
Stochastic Processes .
Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1977 .

22) E. W. Larsen
The Spectrum of the Multigroup Neutron Transport
Operator for Bounded Spatial Domains .
J. Math. Phys. 20 , 1776 - 1782 , 1979 .

23) M. Lin
On the Uniform Ergodic Theorem II .
Proc. Amer. Math. Soc. 46 , 217 - 225 , 1974 .

24) C. S. C. Lin und S. Y. Shaw
Ergodic Theorems of Semigroups and Application.
Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 6 , 181 - 188 , 1978 .

25) R. Nagel
Mittelergodische Halbgruppen linearer Operatoren.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 23 , 75 - 87 , 1973 .

26) R. Nagel
Unbeschränkte Operatoren.
Skriptum zur Vorlesung , Tübingen 1978 .

27) R. Nagel
Unbeschränkte Operatoren auf Banachverbänden und
C^*-Algebren. Skriptum zur Vorlesung , Tübingen 1978/79 .

28) R. Nagel und H. Uhlig
An Abstract Kato Inequality for Generators of
Positive Operator Semigroups on Banach Lattices.
Erscheint demnächst .

29) A. Pazy
Semi-Groups of Linear Operators and Applications
to Partial Differential Equations.
Univ. of Maryland, Lecture Note 10 , 1974 .

30) R. S. Phillips
Semi-Groups of Operators.
Bull. Amer. Math. Soc. 61 , 16 - 33 , 1955 .

31) D. Olesen
On Spectral Subspaces and their Applications to
Automorphism Groups.
C N R S Notes , Marseille 1974 .

32) D. Ornstein und L. Sucheston
An Operator Theorem on L_1-Convergence to Zero with Applications to Markov Kernels.
Ann. Math. Statist. 41 , 1631 - 1639 , 1970 .

33) M. Reed und B. Simon
Methods of Modern Mathematical Physics , Vol.II - IV .
New York : Academic Press 1975 / 1979 / 1978 .

34) W. Rudin
Real and Complex Analysis .
London - New York : McGraw-Hill 1970 .

35) H. H. Schaefer
Topological Vector Spaces (4^{th} print) .
Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1980

36) H. H. Schaefer
Banach Lattices and Positive Operators .
Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1974 .

37) H. H. Schaefer
On Positive Contractions in L^p-Spaces .
Trans. Amer. Math. Soc. 257 , 261 - 268 , 1980

38) H. H. Schaefer
Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie .
Jahresbericht der DMV , 82 , 33 - 50 , 1980 .

39) H. H. Schaefer , M. Wolff und W. Arendt
On Lattice Isomorphisms with Positive Real Spectrum and Groups of Positive Operators .
Math. Z. 164 , 115 - 123 , 1978

40) E. Scheffold
Das Spektrum von Verbandsoperatoren in Banachverbänden.
Math. Z. 123 , 177 - 190 , 1971 .

41) E. Scheffold
Fixräume regulärer Operatoren und ein Korovkin-Satz.
J. Funct. Anal. 30 , 147 - 161 , 1978 .

42) M. H. Stone
Linear Transformations in Hilbert Space III .
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 16 , 172 - 175 , 1930 .

43) H. Uhlig
Derivationen und Verbandshalbgruppen .
Dissertation , Tübingen 1979

44) I. Vidav
Existence and Uniqueness of Nonnegative Eigenfunctions of the Boltzmann Operator .
J. Math. Anal. Appl. 22 , 144 - 155 , 1968 .

45) K. Yosida
An Operator-Theoretical Integration of the Wave Equation
J. Math. Soc. Japan 8 , 19 - 22 , 1956 .

46) K. Yosida
Functional Analysis (5^{th} ed.) .
Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1978 .

LEBENSLAUF

Am 19. Mai 1951 wurde ich als Sohn des Diplom-Braumeisters Gerhard Greiner und dessen Ehefrau Gertrud, geb. Preiß, in Marktredwitz geboren. 1953 siedelte die Familie nach Rödental über, wo ich im September 1957 in die Volksschule eintrat. Ab Herbst 1961 besuchte ich das Arnold-Gymnasium in Neustadt/Cbg.. Hier legte ich im Juni 1971 die Reifeprüfung ab. Im Herbst 1971 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen, welches ich im April 1978 mit der Diplomprüfung in Mathematik abschloß. Seit dem 1.Mai 1978 bin ich wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen. Im April 1980 heiratete ich und lebe nun mit meiner Ehefrau Barbara, geb. Wittmann, in Tübingen.

Meine akademischen Lehrer im Fach Mathematik waren die Herren K.-P. Hadeler, E. Meister, R. Nagel, H. H. Schaefer, H. Wielandt, im Fach Physik die Herren M. Baumann, E. Schmid und H. Stumpf.